71. Über die allgemeinen algebraischen Systeme I.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die systematische Einführung der Begriffe in der modernen Algebra, etwa Verbände, Gruppen, Ringe, Körper, freie Gruppen, freie Produkte u. s. w.

§ 1. *Isomorphismus der algebraischen Systeme.* Eine Menge $\mathfrak{A}$ mit den Verknüpfungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ heisst ein *algebraisches System*[1], wenn $a\alpha b$ für gewisse Paar a, b aus $\mathfrak{A}$ als ein Element aus $\mathfrak{A}$ eindeutig definiert ist. Die Menge der Verknüpfungen bezeichnen wir mit V.

Es sei eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$ vorgegeben: $\mathfrak{A} = A_1 + A_2 + \cdots$, $A_i \frown A_j = 0$ $i \neq j$. Ist $a_i\alpha b_j$, $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ — wenn es existiert — unabhängig von der Wahl der Elemente a_i, a_j in einer selben Klasse A_k enthalten, so kann man die Verknüpfung der Klassen durch $A_i\alpha A_j = A_k$ definieren. Dann bilden die Klassen auch ein algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V, welches wir ein *Restklassensystem* von $\mathfrak{A}$ nennen.

Zwei algebraische Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ heissen *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Zuordnung $a \sim a'$, $a \in \mathfrak{A}$, $a' \in \mathfrak{A}'$, gibt, so daß $(a\alpha b)' = a'\alpha b'$ ist. Wenn die Zuordnung einmehrdeutig ist, so spricht man von dem *Homomorphismus* von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$. Dann erhält man eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$, wenn man die einem selben Element aus $\mathfrak{A}'$ zugeordneten Elemente in einer Klasse zusammenfasst. Solche Klassen bilden ersichtlich ein zu $\mathfrak{A}'$ isomorphes Restklassensystem von $\mathfrak{A}$. Da umgekehrt jedes Restklassensystem eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph ist, so kann man den Homomorphismus auch folgendermassen definieren. $\mathfrak{A}'$ heisst zu $\mathfrak{A}$ homomorph, wenn $\mathfrak{A}'$ einem Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Wir betrachten nun eine mehrmehrdeutige Zuordnung $a \sim a'$. Wenn aus $a \sim a'$, $b \sim b'$ stets $a\alpha b \sim a'\alpha b'$ folgt, so heisst die Zuordnung ein *Meromorphismus.* Wenn insbesondere aus $a \sim a'$, $b \sim a'$, $b \sim b'$, $c \sim b'$ stets $a \sim b'$, $c \sim a'$ folgt, so heisst der Meromorphismus ein Klassenmeromorphismus. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nach einer mehrmehrdeutigen Zuordnung klassenmeromorph, so gibt es isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so daß je zwei Elemente a, a' aus den zugeordneten Klassen und nur diese mit einander entsprechen. Die Menge der a entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{A}'$ bezeichnen wir nämlich mit A'_a. Analog bezeichnen wir mit $A_{a'}$ die Menge der a' entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{A}$. Dann bilden die $A_{a'}$ und A'_a nach der Voraussetzung isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, die die verlangte Eigenschaft besitzt. Ist umgekehrt eine isomorphe Zuordnung der Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gegeben, so erhält man einen *Klassenmeromorphismus*, wenn man die Elemente der entsprechenden Klassen zuordnet.

---

1) Abstract algebra bei G. Birkhoff, Lattice theory (1940). Vgl. auch G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935).