69. *Über normierte teilweisegeordnete Moduln.*

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Es sei $\mathfrak{M}$ ein teilweisegeordneter Modul in dem Sinne, wie wir in einer früheren Abhandlung[1] beschrieben haben. Nun nehmen wir an, dass jedem Element von $\mathfrak{M}$ eine reelle Zahl als die Norm von der Art zugeordnet ist:

I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\|=0$ ist dann und nur dann, wenn $a=0$ ist.

II) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$ für jede reelle Zahl α,

III) aus $|a| \leqq |b|$ folgt $\|a\| \leqq \|b\|$.

In einer früheren Abhandlung[2] haben wir relativen Spektren unter Elementen von $\mathfrak{M}$ definiert. In dieser Abhandlung betrachten wir Relationen zwischen der Norm und dem relativen Spektrum. Wir behandeln den allgemeinen Fall in § 1, und als Anwendungen die Charakterisierung von dem allgemeinen L_p-Raum in § 2 und dem allgemeinen C-Raum in § 3.

§ 1. Es sei eine Funktion $f([p])$ von Projektoren in $\mathfrak{M}$. Bei einem Maximalideal von Projektoren $\mathfrak{p}$ und einer Zahl λ verstehen wir die Limesbezeichnung

$$\lim_{[p]\to\mathfrak{p}} f([p]) = \lambda$$

derart, dass zu jeder positiven Zahl ε stets ein Projektor $[p_0] \in \mathfrak{p}$ existiert, damit $|f([p_0][p]) - \lambda| \leqq \varepsilon$ für alle $[p] \in \mathfrak{p}$ gilt, falls λ endlich ist, oder dass zu jeder endlichen Zahl γ stets ein Projektor $[p_0] \in \mathfrak{p}$ existiert, damit $f([p_0][p]) > (<) \gamma$ für alle $[p] \in \mathfrak{p}$ gilt, falls $\lambda = +\infty$ $(=-\infty)$ ist.

Satz 1. Für $(a, \mathfrak{p}) \neq 0$, *d. h.* $[a] \in \mathfrak{p}$, *gilt*

$$\lim_{[p]\to\mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|} = \left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right).$$

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $\left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right) = \lambda$ endlich ist. Dann gibt es für jede positive Zahl ε einen Projektor $[p_0] \in p$, damit

$$|[p_0]b - \lambda[p_0]a| \leqq \varepsilon |[p_0]a|\,^{3)}$$

---

1) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Proc. **16** (1940), 437-441, d. h. ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Körper der reellen Zahlen heisst ein *teilweisegeordneter Modul*, wenn 1) aus $a > b$ und $b > c$ ja $a > c$ folgt; 2) $a \not> a$; 3) für je zwei a, b das Element $a \frown b$ und das Element $a \smile b$ existiert; 4) aus $a > b$ ja $a+c > b+c$ folgt; 5) aus $a > 0$ für jede positive Zahl α ja $\alpha a > 0$ folgt; und 6) für jede Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots$ das Element $c = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu$ existiert: $c \leqq a_\nu$ und $c \geqq x$ für jedes $x \leqq a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$.

2) H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 485-511. Im folgenden wird die Kenntnis von den Resultaten und den Terminologien in dieser Abhandlung vorausgesetzt, die man mit e. S. bezeichnet.

3) e. S. Satz I.1.