67. Über die Charakterisierung des allgemeinen C-Raumes.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Ich habe in einer anderen Abhandlung[1] beschrieben: *wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul*[2] $\mathfrak{M}$ *den Bedingungen genügt:*

M) $\|(|a| \smile |b|)\| = \mathrm{Max}(\|a\|, \|b\|)$

S) $\underset{\alpha}{\text{Obere Grenze}} \|a_\alpha\| = \underset{a_\alpha \leqq b}{\text{Untere Grenze}} \|b\|$

für jede beschränkte Menge positiver Elemente $\{a_\alpha\}$, *und* $\mathfrak{M}$ *über die Norm vollständig ist, so kann man* $\mathfrak{M}$ *durch alle stetigen Funktionen* $f_a(x)$ (*entsprechend* $a \in \mathfrak{M}$), *oder durch alle, in einem bestimmten Punkt verschwindenden, stetigen Funktionen auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum R vollständig darstellen, und sogar* $\|a\| = \underset{x \in R}{\mathrm{Max}} |f_a(x)|$.
Diesen Satz haben wir unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element besitzt, und bemerkt, dass man diesen Satz im allgemeinen Falle auch beweisen kann. In dieser Abhandlung wollen wir den Beweis dieses Satzes ergänzen, indem wir diesen Satz unter der Voraussetzung beweisen, dass dieser Satz schon besteht, falls $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element umfasst.

§ 1. Zuerst betrachten wir einen teilweise geordneten Modul $\mathfrak{M}$, der nur den algebraischen Bedingungen 1)–5), nicht notwendig der Limesbedingung 6)[3], genügt. Für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ bezeichnet man mit $\mathfrak{P}'$ die Menge aller Elemente b von $\mathfrak{M}$, die zu jedem Element von $\mathfrak{P}$ orthogonal sind, d. h. $|b| \frown |a| = 0$ für alle $a \in \mathfrak{P}$.

Definition 1. Eine Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ heisst eine *normale Mannigfaltigkeit in* $\mathfrak{M}$, wenn $(\mathfrak{P}')' = \mathfrak{P}$ ist.

Man kann dann leicht einsehen, dass jede normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ mit a, b auch $\alpha a + \beta b$ für reelle Zahlen α, β, $a \smile b$, $a \frown b$, und x für $|x| \leqq |a|$ enthält, und folglich ist $\mathfrak{P}$ auch ein teilweisegeordneter Modul. Es ist auch deutlich, dass für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{P}'$ eine normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$ ist.

Definition 2. Für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ bezeichnet man mit $[\mathfrak{P}]$ die, $\mathfrak{P}$ umfassende, kleinste, normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$, d. h. $[\mathfrak{P}] = (\mathfrak{P}')'$.

---

1) H. Nakano: Über normierte teilweisegeordnete Moduln, Proc. **17** (1941), 311.

2) In dieser Abhandlung verstehen wir unter einem *normierten teilweisegeordneten Modul* $\mathfrak{M}$ einen derartigen normierten Modul in bezug auf den Körper der reellen Zahlen, dass 1) aus $a > b$ und $b > c$ ja $a > c$ folgt; 2) $a \not> a$; 3) für je zwei a, b das Element $a \smile b$ und $a \frown b$ in $\mathfrak{M}$ existiert; 4) aus $a > b$ ja $a + c > b + c$ folgt; 5) aus $a > 0$ für jede positive Zahl α ja $\alpha a > 0$ folgt; I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\| = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$ ist; II) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$ für jede reelle Zahl α; und III) aus $|a| \leqq |b|$ ja $\|a\| \leqq \|b\|$ folgt.

3) Vgl. 1).