98. *Sur une propriété des ensembles plans de mesure positive.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Dec. 12, 1941.)

1. Pour fixer les idées, considérons un ensemble plan E situé dans le carré $T: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. Si la mesure de E (au sens de M. Lebesgue) est positive, il existe un sous-ensemble fermé F de E qui est de mesure positive. Désignons par p la mesure de F. Divisons ensuite le carré T en n_1^2 carrés (fermés) $e_{n_1}^{(1)}$ égaux par des droites parallèles aux axes de coordonnées. *Si n_1 est assez grand, il existe un carré $e_{n_1}^{(1)}$ jouissant de la propriété : la mesure de la partie commune à F et à ce carré est plus grande que $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, ε_1 étant un nombre réel positif arbitraire, mais donné d'avance.* En effet, supposons qu'il existe σ_{n_1} carrés c'_{n_1} disjoints de F, et τ_{n_1} carrés d'_{n_1} qui ont des points communs avec F. La somme des carrés $c'_{n_1} (n_1=1, 2, 3, \dots)$ étant égale au complémentaire de F, la quantité σ_{n_1}/n_1^2 tend vers $1-p$ lorsque n_1 s'augmente indéfiniment. Par suite la quantité τ_{n_1}/n_1^2 tend vers p avec $n_1 \rightarrow \infty$. Si, pour tout carré d'_{n_1}, la mesure de $F \cdot d'_{n_1}$ est inférieure ou égale à $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, la mesure de F serait inférieure ou égale à $\tau_{n_1}(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, et celui-ci tend vers $(1-\varepsilon_1)p$. Cela est impossible, puisque $p > 0$. Donc, il existe un nombre n_1 et un carré d'_{n_1}, soit $e_{n_1}^{(1)*}$, tel que la mesure de $F \cdot e_{n_1}^{(1)*}$ est supérieure à $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$. Supposons d'ailleurs que nous ayons $0 < \varepsilon_1 < 1/18$.

Divisons, maintenant, le carré $e_{n_1}^{(1)*}$ en n_2^2 carrés (fermés) $e_{n_2}^{(2)}$ égaux. Le côté horizontal du carré $e_{n_1}^{(1)}$ sera divisé en n_2 intervalles que nous désignerons par $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{n_2}^{(2)}$, et le côté perpendiculaire sera divisé également en n_2 intervalles désignés par $\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots, \eta_{n2}^{(2)}$. Le petit carré ainsi obtenu sera désigné donc par $(\xi_\mu^{(2)}, \eta_\mu^{(2)})$, ou plus brièvement par (μ, ν), $\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, n_2$. Supposons qu'il existe σ_{n_2} carrés c''_{n_2} disjoints de F et τ_{n2} carrés d''_{n2} qui ont des points communs avec F.

Soit ε_2 un nombre réel arbitraire satisfaisant à l'inégalité : $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Je dis qu'*il existe alors un nombre n_2 assez grand jouissant de la propriété non seulement qu'il existe un carré d''_{n2} dont la mesure de la partie commune avec F est supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$, mais encore que la mesure de la somme des parties communes à F des $e_{n2}^{(2)}$ tels que la mesure de $e_{n_2}^{(2)} \cdot F$ soit supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$ surpasse $(1-2\varepsilon_1)/n_1^2$.* En effet, désignons d'abord par p_1 la mesure de la partie commune $e_{n_1}^{(1)*} \cdot F$. Remarquons que la somme de l'aire des c''_{n_2} tend vers $(1/n_1^2)-p_1$ lorsque n_2 s'augmente indéfiniment. Si la mesure de la somme des $d''_{n2} \cdot F$ tels que la mesure de $d''_{n_2} \cdot F$ soit supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$ reste inférieure ou égale à $(1-2\varepsilon_1)/n_1^2$, on a, en désignant par τ'_{n_2} le nombre de tels carrés,

$$\tau'_{n_2} \leq (1-2\varepsilon_1)/n_1^2 : (1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2),$$

$$\tau_{n_2} - \tau'_{n2} \geq \tau_{n_2} - (1-2\varepsilon_1) \times n_2^2/(1-\varepsilon_2) \tag{1}$$

Or, comme

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \{\tau_{n_2}/(n_1^2 \times n_2^2)\} = p_1, \tag{2}$$