38. Über die allgemeinen algebraischen Systeme II*.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 13, 1942.)

§ 6. *Bemerkungen über die freien Gruppen.* Die durch eine Menge E der Elemente erzeugte freie Gruppe, die nach § 3 und § 5 als freies algebraisches System definiert ist, wird dadurch charakterisiert, daß jede durch E erzeugte Gruppe ihr homomorph ist. Setzt man den entsprechenden Satz für die wie üblich definierte freie Gruppe[1] als bekannt voraus, so erkennt man, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. Man kann in der Tat die üblich definierte freie Gruppe als eine treue Darstellung unserer freien Gruppe ansehen, wie folgt. Man bilde zunächst das absolut freie algebraische System mit Verknüpfungen $\cdot$, $\backslash$, $/$ oder nach der üblichen Schreibweise $a \cdot b = ab$, $a \backslash b = a^{-1}b$, $a/b = ab^{-1}$. Setzt man das Assoziativgesetz der Multiplikation voraus, so erkennt man, daß jedes Element sich in der Form $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\varepsilon_r}$, $\varepsilon = \pm 1$, mit x_i aus E darstellen lässt. Dann führen wir die beiden Bedingungen $a(a^{-1}b) = b$, $(ab^{-1})b = a$ ein; d. h. man nimmt in der obigen Ausdrücke $x_{i_\lambda}^{\varepsilon_\lambda} x_{i_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ weg, falls $x_{i_\lambda} = x_{i_{\lambda+1}}$, $\varepsilon_\lambda = -\varepsilon_{\lambda+1}$ ist. Die so entstehenden Ausdrücke bilden bekanntlich eine durch E erzeugte Gruppe mit dem Einselement $aa^{-1} = bb^{-1}$. Die freie Gruppe muss aber ihr homomorph, also nach § 3 ihr isomorph sein.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe. Mit f, f' sind afa^{-1}, ff'^{-1} sind Relationen[2]. Ist $R = \{f_1, f_2, \ldots,\}$ ein Relationensystem, so bilden die aus den f durch endlichmalige Division und Transformation erhältlichen Ausdrücke einen Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$, der nur aus den Folgerelationen besteht. Die Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ ist ersichtlich eine Gruppe mit Relationen R. Daher besteht $\mathfrak{R}$ aus den sämtlichen Folgerelationen von R und $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ ist die freie Gruppe mit Relationen R im Sinne von § 3.

In einer allgemeinen Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit C_1 das Produkt endlichvieler Kommutatoren, C_k das Produkt endlichvieler Kommutatoren der $(k-1)$-ten Ableitung von $\mathfrak{G}$. Dann lässt sich C_k als eine Verknüpfungsfunktion darstellen. $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann auflösbar, wenn die sämtlichen Verknüpfungsfunktionen C_k für gewisses k Einselement werden. D. h. die auflösbaren Gruppen von der Länge k der Kommutatorreihe werden durch $C_k = 1$ charakterisiert. Damit ist gezeigt, daß der Begriff der auflösbaren Gruppen von der Länge k primitiv im Sinne von § 2. Daher kann man etwa auch von den freien auflösbaren Gruppen von der Länge k sprechen. Dagegen ist der Begriff der auflösbaren

---

*) Der erste Teil erschient in Proc. **17** (1941), 323–327.

1) Vgl. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamburger Abh. **5** (1927). K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig (1932). S. Iyanaga, Freie Gruppen (japanisch) (1940).

2) Nach unserer Schreibweise $f=1$.