34. Sur le premier théorème dans la theorie des fonctions méromorphes.

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 13, 1942.)

1. Dans la théorie de la répartition des valeurs des fonctions méromorphes, deux théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna jouent un rôle important, et sont étudiés par plusieurs auteurs. Quant au premier théorème, on le prouve en employant la fonction de Green ou la formule de Gauss-Green, ou introduisant des quantités géométriques suivant M. Simizu. Dans cette Note je montre qu'il est un particulier cas du théorème de M. Cauchy.

Soient $w=f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle: $|z|<R$ $(\leqq\infty)$, b_μ son pôle et a_ν son nul, et $\lambda(b)$ et $\lambda(a)$ leurs multiplicités. Définissons un rectangle:

$$\log\rho<\Re\zeta<\log r\,,\qquad 0<\Im\zeta<2\pi$$

dans le plan des $\zeta=\log z$ pour $r<R$ et $\rho>0$ arbitrairement petit. Soit D un domaine qui ést enlevé du rectangle les petits cercles K autour de $\log b$ et $\log a$, et les coupures:

$$L(b):\quad \Im\zeta=arg\,b\,,\quad log\,|b|<\Re\zeta<log\,r$$

$$L(a):\quad \Im\zeta=arg\,a\,,\quad log\,|a|<\Re\zeta<log\,r\,.$$

Dans le domaine D, $\omega=\log f(z)$ est uniforme et réguliere. On l'applique dans D le théorème de M. Cauchy: *Si une fonction $\varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée, et continue sur la courbe elle-même, l'intégrale $\int\varphi(z)\,dz$, prise le long de cette courbe, est égale à zéro.*

Supposons que $f(z)$ est régulière sur l'axe réel positif. Alors on a,

i. Si les rayons des petits cercles tendent à zéro, l'intégrale sur K tend à zéro.

ii. Si ζ parcourt le long de K une fois, $\omega(\zeta)=log f(z)$ augmente $\lambda(b)2\pi i$ ou $-\lambda(a)2\pi i$. Donc, l'intégrale sur L est égale à

$$2\pi i\cdot\lambda(b)\log\frac{r}{|b|}\,,\quad\text{ou}\quad -2\pi i\cdot\lambda(a)\log\frac{r}{|a|}$$

iii. Pour $\rho<t<r$, on a

$$log\,f(\rho)=\begin{cases} log\,f(\rho e^{2\pi i})\,, & \text{si } f(0)\neq 0,\ \neq\infty \\ log\,f(\rho e^{2\pi i})-n(0,0)\,, & \text{si } f(0)=0 \\ log\,f(\rho e^{2\pi i})\quad n(0,\infty)\,, & \text{si } f(0)=\infty \end{cases}$$

Par conséquent, on a