58. Über die allgemeinen algebraischen Systeme, IV*.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1942.)

§ 13. *Direktes Produkt.* Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ algebraische Systeme mit denselben Verknüpfungen. Die Gesamtheit der Symbolen $a=(a_1a_2\cdots a_n)$ mit a_i aus $\mathfrak{A}_i$ bildet dann auch ein algebraisches System $\mathfrak{A}$, wenn man $(a_1a_2\cdots a_n)\alpha(b_1b_2\cdots b_n)$ für eine Verknüpfung α durch $(a_1\alpha b_1\, a_2\alpha b_2\cdots a_n\alpha b_n)$ definiert. $\mathfrak{A}$ heisst das direkte Produkt von den $\mathfrak{A}_i$; es wird mit $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\mathfrak{A}_n)$ bezeichnet. $\mathfrak{A}$ wird bis auf den Isomorphismus durch den direkten Komponenten $\mathfrak{A}_i$ (unabhängig von der Anordnung) eindeutig bestimmt. Sind die $\mathfrak{A}_i$ sämtlich primitive A-algebraische Systeme[1], so ist es auch das direkte Produkt.

Durchläuft a alle Elemente eines Untersysteme $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, so durchläuft a_i ein Untersystem $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{A}$. Das Untersystem $\bar{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\cdots\mathfrak{B}_n)$ heisst die Hülle von $\mathfrak{B}$ in bezug auf die Zerlegung $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\mathfrak{A}_n)$ von $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$ heisst ein subdirektes Produkt von den $\mathfrak{B}_i$. Setzt man $b\equiv b'$, wenn $b_i=b'_i$ für ein festes i ist, so erhält man ein zu $\mathfrak{B}_i$ isomorphes Restklassensystem von $\mathfrak{B}$; damit ist eine homomorphe Abbildung φ_i von $\mathfrak{B}$ auf einen Komponent $\mathfrak{B}_i$ aufgestellt. Die durch φ_i vermittelte Restklassenzerlegung von $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi}_i$. Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ die Bilder von $\mathfrak{B}$ bei den homomorphen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, so besitzt $\mathfrak{B}$ bekanntlich dann und nur dann eine isomorphe Darstellung als subdirektes Produkt von den $\mathfrak{B}$, wenn $\tilde{\varphi}_1\frown\tilde{\varphi}_2\frown\cdots\frown\tilde{\varphi}_n=0$ im Sinne der Verbände ist[2].

Wir werden nun gewisse Sätze in der Gruppentheorie auf unseren allgemeinen Fall übertragen. Zugrundliegend sind dabei die in § 11 angegebenen Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{A}$ besitzt ein Nullelement.

II. Die Vereinigung zweier normalen Untersysteme eines Untersystems $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist normal in $\mathfrak{A}'$.

III. Der Meromorphismus zweier zu $\mathfrak{A}'$ homomorphen Systeme ist stets ein Klassenmeromorphismus.

Zunächst setzen wir III voraus. Der Verband aller Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$ ist nach § 11 modulär. Daher kann man gewisse Sätze über die Darstellungen der Gruppen als subdirekte Produkte der irreduziblen Faktoren auf unseren allgemeineren Fall übertragen. Darunter nennen wir hier die folgenden zwei Sätze[3].

Gilt der aufsteigende Kettensatz im Verband der Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$, so ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren der unver-

---

* I in Proc. **17** (1941, 323-327; II ebenda **18** (1942), 179-184; III ebenda **18** (1942), 227-232.

1) Vgl. § 2 in I.

2) G. Birkhoff, Lattice Theory (1940), Theorem 3.20.

3) G. Birkhoff a. a. O. Corollary von Theorem 3.23 und Theorem 5.15.