72. *Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul.*

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematischer Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

In einer früheren Abhandlung[1] haben wir normierte teilweisegeordnete Moduln betrachtet. Hier wollen wir eine hinreichende Bedingung geben, damit ein normierter teilweisegeordneter Modul vollständig über Norm ist.

Im folgenden sei $\mathfrak{M}$ ein normierter teilweisegeordneter Modul wie in einer früheren Abhandlung[2]:

1) aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$;
2) $a \not> a$;
3) für je zwei Elemente a, b gibt es $a \frown b$ und $a \smile b$;
4) aus $a > b$ folgt $a+c > b+c$;
5) aus $a > 0$ folgt $\alpha a > 0$ für jede positive Zahl α;
6) für jede absteigende Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ gibt es $c = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu$: $c \leqq a_\nu$ und $c \geqq x$ für jedes $x \leqq a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$;

I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\| = 0$ besteht nur im Falle $a = 0$;
II) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$ für jede reelle Zahl α;
III) aus $|a| \leqq |b|$ folgt $\|a\| \leqq \|b\|$;
IV) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$.

Satz 1. *Ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ sei stetig: für jede Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, gilt stets $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$. Es sei eine Cauchysche Folge von Elementen $x_1, x_2, \dots$: für jede positive Zahl ε gibt es ein ν, damit*

$$\|x_\lambda - x_\mu\| \leqq \varepsilon \qquad \text{für } \lambda, \mu \geqq \nu$$

gilt. Wenn die Folge $x_1, x_2, \dots$ eine beschränkte Teilfolge enthält, d. h. bei einem passenden Element l gilt $|x_\nu| \leqq l$ für unendlich viele ν, so gibt es ein Element x, für das

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu - x\| = 0$$

ist, und die Folge $x_1, x_2, \dots$ enthält dann zwar eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

Beweis. Im folgenden verwenden wir Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung[3]. Aus der Folge $x_1, x_2, \dots$ kann man nach Voraussetzung eine derartige Teilfolge $y_1, y_2, \dots$ auswählen, dass

1) H. Nakano: Über normierte teilweisegeordnete Moduln, Proc. **17** (1941), 311-317.

2) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul. Diese Abhandlung erscheint nächstens in Jour. Fac. Sci. Imp. Un. Tokyo.

3) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Japanese Jour. Math. **17** (1941) 425-511.