69. *Bemerkungen über die induzierten Charaktere endlicher Gruppen.*

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Darstellungen durch lineare Transformationen (Matrizen) in einem Körper K der Charakteristik Null. Die durch einfache Charaktere χ, χ' von $\mathfrak{H}$ induzierten Charaktere von $\mathfrak{G}$ sind bekanntlich dann und nur dann gleich, wenn χ und χ' in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, d. h. wenn $\chi'(a)=\chi(cac^{-1})$ für jedem a aus $\mathfrak{H}$ mit einem bestimmten c aus $\mathfrak{G}$ ist[1].

In der vorliegenden Note studieren wir den Fall, wo χ und χ' Charaktere zweier verschiedenen Normalteiler sind. Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall, wo χ und χ' nicht notwendig einfach sind; und wir bestimmen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch χ und χ' induzierten Charaktere von $\mathfrak{G}$ miteinander gleich sind. Der Satz lässt sich sehr vereinfachen, wenn χ und χ' einfach sind.

Zwei Charaktere $\chi=\sum\chi_i$, $\chi'=\sum\chi'_i$ eines selben Normalteilers $\mathfrak{H}$ heissen konjugiert in $\mathfrak{G}$, wenn die einfachen Charaktere χ_i, χ'_i eineindeutig so zugeordnet werden, daß die entsprechenden einfachen Charaktere konjugiert in $\mathfrak{G}$ sind; im Zeichen $\chi\sim\chi'$. Ist $\mathfrak{D}$ ein in $\mathfrak{H}$ enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist φ ein Charakter von $\mathfrak{D}$, so bezeichnen wir den durch φ induzierten Charakter von $\mathfrak{H}$ mit χ_φ. Den durch χ induzierten Charakter von $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir mit φ^χ.

Hilfssatz. Dann und nur dann ist $\chi_\varphi\sim\chi_{\varphi'}$, wenn $\varphi\sim\varphi'$ ist.

Beweis. Ersichtlich ist $\chi_\varphi(a)=\chi_{\varphi'}(a)=0$, wenn a in $\mathfrak{D}$ nicht liegt. Sind nun $c_1, c_2, \dots, c_r$ die Vertreter der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$, so ist bekanntlich

$$\chi_\varphi(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi(c_i a c_i^{-1}), \qquad \chi_{\varphi'}(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi'(c_i a c_i^{-1})$$

für a aus $\mathfrak{D}$. Aus $\varphi'(a)=\varphi(xax^{-1})$ mit x aus $\mathfrak{G}$ folgt

$$\chi_{\varphi'}(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi(xc_iac_i^{-1}x^{-1})=\sum_{i=1}^{r}\varphi(c_{i'}xax^{-1}c_{i'}^{-1})=\chi_\varphi(xax^{-1})$$

wo $\binom{i}{i'}$ eine Permutation bedeutet, also ist $\chi_\varphi\sim\chi_{\varphi'}$. Sind im allgemeinen

$$\varphi=\sum_j\varphi_j, \qquad \varphi'=\sum_j\varphi'_j$$

die Zerlegung von φ und φ' in die einfachen Charaktere, so sind

---

1) G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Berliner Sitzungsberichte (1898).