

## 108. Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul.

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1942)

Kürzlich hat T. Nakayama einen teilweisegeordneten Modul gegeben, der zu keiner Klasse von Funktionen algebraisch isomorph ist<sup>1)</sup>. Dabei habe ich bemerkt, dass der sogenannte  $L_p$ -Raum ein solcher ist. Hier wollen wir diese Aufgabe näher erörtern. Im folgenden verwenden wir Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung<sup>2)</sup>.

$\mathfrak{M}$  sei ein teilweisegeordneter Modul, und  $\mathfrak{C}$  sei sein Eigenraum.

*Definition 1.* Ein Punkt  $b$  in  $\mathfrak{C}$  heisst ein *beschränkter Punkt* von  $\mathfrak{M}$ , wenn es ein derartiges Element  $a \in \mathfrak{M}$  gibt, dass das relative Spektrum  $\left(\frac{x}{a}, b\right)$  für alle  $x \in \mathfrak{M}$  endlich ist.

*Satz 1.* Wenn ein positives lineares Funktional  $P(\neq 0)$  auf  $\mathfrak{M}$  der Bedingung:

$$(*) \quad \text{Min} \{P(a), P(b)\} = 0 \quad \text{für} \quad a \wedge b = 0^{3)}$$

genügt, so gibt es einen einzigen derartigen beschränkten Punkt  $b$  von  $\mathfrak{M}$ , dass für  $P(a) \neq 0$ ,  $[p] \in b$  stets  $P([p]a) = P(a)$  ist, und dann gilt für  $P(b) \neq 0$  stets

$$(**) \quad \frac{P(a)}{P(b)} = \left(\frac{a}{b}, b\right).$$

*Beweis.* Wenn  $P(a) \neq 0$  ist, so gilt nach (\*) für jeden Projektor  $[p]$

$$P([p]a) = 0 \quad \text{oder} \quad = P(a).$$

Für  $P(a) \neq 0$  bildet die Menge  $\mathfrak{p}_a$  aller Projektoren  $[p]$  mit  $P([p]a) \neq 0$  ein Maximalideal, denn 1)  $\mathfrak{p}_a \bar{\ni} 0$ , 2) aus  $[q] \geq [p]$ ,  $P([p]a) \neq 0$  folgt  $P(([q] - [p])a) = 0$  nach (\*) und folglich  $P([q]a) = P([p]a)$ , 3) aus  $P([p]a) \neq 0$ ,  $P([q]a) \neq 0$  folgt  $P([p][q]a) \neq 0$  nach (\*), und für  $P([q]a) = 0$  gilt  $P(([a] - [q][a])a) = P(a) \neq 0$ . Dieses Maximalideal  $\mathfrak{p}_a$  ist dasselbe für jedes  $a$  mit  $P(a) \neq 0$ , denn für  $\mathfrak{p}_a \neq \mathfrak{p}_b$  gäbe es zwei Umgebungen  $[p], [q]$  mit  $[p][q] = 0$ ,  $\mathfrak{p}_a \ni [p]$ ,  $\mathfrak{p}_b \ni [q]$  und dann wäre nach (\*)  $P([p]a)P([q]b) = 0$ . Dieses einzige  $\mathfrak{p}_a$  bezeichnet man mit  $b$ .

1) T. Nakayama: On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I. Proc. **18** (1942), 185-187.

2) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul. Jour. Fac. Sci., Tokyo Imp. Univ. Sec. I. **4** (1942), 201-382.

3) Diese Bedingung (\*) ist offenbar äquivalent mit

$$P(a \vee b) = \text{Max} \{P(a), P(b)\} \quad \text{oder} \quad P(a \wedge b) = \text{Min} \{P(a), P(b)\}.$$