123. Über Erweiterungen von allgemein teilweisegeordneten Moduln, I.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12. 1942.)

Einen Modul $\mathfrak{A}$ in bezug auf die reellen Zahlen nennen wir im folgenden einen *allgemein teilweisegeordneten Modul*, wenn

1) aus $a > b$, $b > c$ ja $a > c$ folgt;
2) $a > a$;
3) für je zwei a, b stets ein $c \geqq a$, b existiert;
4) für jedes c aus $a > b$ stets $a + c > b + c$ folgt;
5) für jede positive Zahl α aus $a > 0$ stets $\alpha a > 0$ folgt.

Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ der Archimedesschen Bedingung genügt: $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} a \left(= \bigcap_{\nu>0} \frac{1}{\nu} a\right) = 0$ für $a > 0$, so kann man $\mathfrak{A}$ durch Schnitte zu einem universal teilweisegeordneten Modul erweitern[1]. Diese Erweiterung nennnn wir die *Schnitterweiterung.* Wir haben schon gefunden, dass die Schnitterweiterung öfters zu schönem Nutzen gekommen ist. Wenn man ein lineares Funktional auf $\mathfrak{A}$ zu betrachten ist, so darf man die Schnitterweiterung nicht mehr verwenden. Daher muss man dann eine andere Methode erdenken, was die Absicht dieser Abhandlung ist.

§ 1. Funktionalerweiterung.

Im folgenden nehmen wir an, dass ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ noch den zwei Bedingungen genügt:

I) Wenn $0 \leqq x \leqq a + b$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ ist, so gibt es zwei Elemente a_1, b_1, für welche $x = a_1 + b_1$, $0 \leqq a_1 \leqq a$, $0 \leqq b_1 \leqq b$ ist[2].

II) Für jedes $a > 0$ gibt es ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}$ mit $P(a) > 0$.

Ein lineares Funktional L auf $\mathfrak{A}$ heisst *relativ beschränkt*, wenn für jedes $a > 0$ stets

$$\underset{0 \leq x \leq a}{\text{Obere Grenze}}\, L(x) < +\infty$$

ist. Jedes positive lineare Funktional auf $\mathfrak{A}$ ist dann offenbar relativ beschränkt.

Setzt man für ein relativ beschränktes lineares Funktional L auf $\mathfrak{A}$

---

1) H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 485-511, Anhang II.

2) Diese Bedingung I) ist gleichbedeutend mit der Bedingung: wenn $x + y = a + b$ für vier Elemente $a, b, x, y \geqq 0$ besteht, so gibt es vier Elemente $u_1, u_2, v_1, v_2 \geqq 0$, für welche $x = u_1 + u_2$, $y = v_1 + v_2$, $a = u_1 + v_1$, $b = u_2 + v_2$ ist, was zuerst von F. Riesz gegeben ist: Sur quelques notions fundamentales dans la théorie générale des operations linéaires, Ann. Math. **41** (1940), 174-206. Wenn $a \frown b$ stets sinnvoll in $\mathfrak{A}$ ist, so kann man leicht einsehen, dass $\mathfrak{A}$ der Bedingung I) genügt.