

3. Über die Stetigkeit des normierten teilweise geordneten Moduls.

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1943.)

In einer früheren Abhandlung¹⁾ haben wir die Stetigkeit des normierten teilweisegeordneten Moduls definiert: ein normierter teilweisegeordneter Modul \mathfrak{M} heisst *stetig*, wenn für $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$ stets $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| = 0$ ist; \mathfrak{M} heisst *universal stetig*, wenn für jede abnehmende Menge positiver Elemente $\{a_\alpha\}$ mit $\bigwedge_a a_\alpha = 0$ stets

$$\text{Untere Grenze } \|a_\alpha\| = 0$$

ist. Hier wollen wir bemerken, dass wenn \mathfrak{M} stetig ist, \mathfrak{M} auch universal stetig ist.

Satz. Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul \mathfrak{M} stetig ist, so ist \mathfrak{M} superuniversal und folglich universal stetig²⁾.

Beweis. $\{a_\alpha\}$ sei eine abnehmende Menge positiver Elemente. Setzt man

$$\lambda = \text{Unter Grenze } \left\{ \text{Obere Grenze } \|a_\alpha - a_\beta\| \right\},$$

α $\beta: a_\alpha \geq a_\beta \in \{a_\alpha\}$

so ist $\lambda = 0$. Denn sonst gäbe es für $\lambda > \varepsilon > 0$ eine Folge $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ in $\{a_\alpha\}$, für welche

$$\|b_\nu - b_{\nu+1}\| > \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

besteht, und für $b_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu$ gälte sodann

$$\varepsilon < \|b_\nu - b_{\nu+1}\| \leq \|b_\nu - b_0\|,$$

was nach Stetigkeit von \mathfrak{M} unmöglich ist.

Wegen $\lambda = 0$ kann man aus $\{a_\alpha\}$ eine Folge a'_1, a'_2, \dots auswählen, für welche

$$\text{Obere Grenze } \|a'_\nu - a_\alpha\| < \frac{1}{2^\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

$\alpha: a'_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}$

ist. Da $\{a_\alpha\}$ abnehmend ist, gibt es dann eine Folge $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ in $\{a_\alpha\}$, für welche $a'_\nu \geq a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ist, und für diese neue Folge gilt auch

$$(*) \quad \text{Obere Grenze } \|a_\nu - a_\alpha\| \leq \text{Obere Grenze } \|a'_\nu - a_\alpha\| < \frac{1}{2^\nu}.$$

$\alpha: a_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}$ $\alpha: a'_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}$

1) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul, Jour. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, 4, 201-382 (1942).

2) Diesen Satz haben wir unter der stärkeren Voraussetzung bewiesen: aus $|a| < |b|$ folgt $\|a\| < \|b\|$. Vgl. 1) Satz 14.1.