PAPERS COMMUNICATED

12. Sur une extension d'un théorème de M. Teichmüller[*].

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1943.)

1. M. O. Teichmüller[1] a donné le théorème très élégant et util par la méthode élémentaire:

Théorème de M. Teichmüller. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine simplement connexe du ζ-plan et $\mathfrak{S}$ son transversal rectiligne. Soit encore $\omega=\omega(\zeta)$ une fonction régulière et univalente qui représente $\mathfrak{G}$ en le cercle-unité $|\omega|<1$. Alors on a toujours

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}}\log\frac{1}{|\omega(\zeta)|}\,|d\zeta|\leqq CL\,, \tag{1}$$

où L désigne une longueur de $\mathfrak{S}$ et C le constant numérique.

Nous allons démontrer l'extension de ce théorème pour un domaine multiplement connexe. $\log\dfrac{1}{|\omega(\zeta)|}$ est une fonction de Green dans $\mathfrak{G}$, donc nous écrivons la fonction de Green $g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})$ de pôle quelconque ζ_0 au lieu de $\log\dfrac{1}{|\omega(\zeta)|}$.

2. Commençons de prouver la proposition pour un domaine quelconque doublement connexe. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine doublement connexe limité par deux continuums Γ_1 et Γ_2, et $\overline{\mathfrak{G}}_\nu$ ($\nu=1$ et 2) domaine simplement connexe limité par Γ_ν, qui contient $\mathfrak{G}$ dans son intérieur. Pour un segment $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ dont deux extrémités appartiennent au même contour Γ_ν ($\nu=1$ ou 2), $g(\zeta,\zeta_0;\overline{\mathfrak{G}}_\nu)>g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})$. Par conséquent on a, d'après (1),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}'}g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})\,|d\zeta|<\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}'}g(\zeta,\zeta_0;\overline{\mathfrak{G}}_\nu)\,|d\zeta|\leqq CL\,.$$

Considérons donc le cas où $\mathfrak{S}$ consiste de deux segments $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sur une même droite, chacun desquels lie Γ_1 à Γ_2. Désignons par L somme de longueurs de deux segments, et par L_0 longueur d'un segment $\mathfrak{S}_0$ le plus petit qui contient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

Cas de $L_0\leqq 2L$. Supposons que deux extrémités de $\mathfrak{S}_0$ appartiennent au même contour Γ_ν. Car dans le cas contraire, sur $\mathfrak{S}_0$ il existe troisième segment $\mathfrak{S}_3$ entre $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, donc il suffit considérer combinaison de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_3$, et celle de $\mathfrak{S}_3$ et de $\mathfrak{S}_2$.

---

*) Monbusyô-Kagakukenkyû.

1) O. Teichmüller, Unkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Deuts. Math., **2** (1937).