30. Über Erweiterungen von allgemein teilweisegeordneten Moduln, II.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1943.)

§ 3. Totalunbeschränkte Moduln.

Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ mit der Funktionalerweiterung $\tilde{\tilde{\mathfrak{A}}}$ übereinstimmt, d. h. $\mathfrak{A}=\tilde{\tilde{\mathfrak{A}}}$, so heisst $\mathfrak{A}$ *funktionalmaximal.* Da $\tilde{\tilde{\mathfrak{A}}}$ reflexiv ist, ist $\mathfrak{A}$ auch reflexiv, wenn $\mathfrak{A}$ funktionalmaximal ist. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{A}$ reflexiv und jedes positive lineare Funktional auf $\mathfrak{A}$ stets universal stetig ist, so ist $\mathfrak{A}$ offenbar funktionalmaximal. Im folgenden wollen wir eine hinreichende Bedingung geben, damit ein reflexiver Modul funktionalmaximal sei.

Ein teilweisegeordneter Modul[1] $\mathfrak{M}$ heisst *totalunbeschränkt,* wenn es für jede konvergente Reihe $a_1+a_2+\cdots$ mit $a_\mu \frown a_\nu=0$ $(\mu \neq \nu)$ stets eine Zahlenfolge $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu=\infty$ gibt, für welche die Reihe $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots$ auch konvergiert. Dann gilt offenbar der

Satz 6. Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ vollkommen[2] ist, so ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.

Satz 7. Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ regulär vollständig[3] ist, so ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.

Beweis. Wenn eine Reihe $a_1+a_2+\cdots$, $a_\mu \frown a_\nu=0$ $(\mu\neq\nu)$ konvergiert, so gilt für $b_\nu=a_\nu+a_{\nu+1}+\cdots$

$$\mu b_1 \geqq \mu b_2 \geqq \cdots \qquad \lim_{\nu\to\infty} \mu b_\nu=0 \qquad (\mu=1, 2, \cdots).$$

Wenn $\mathfrak{M}$ regulär vollständig ist, so gibt es ein Element l und eine Zahlenfolge $1=\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots$, für welche $l \geqq \mu(a_{\nu_\mu}+a_{\nu_{\mu+1}}+\cdots)$ ist. Setzt man $\varkappa_\nu=\operatorname{Max}_{\nu_\mu \leqq \nu} \mu$, so gilt $1=\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \varkappa_\nu=\infty$ und $l \geqq \varkappa_\nu a_\nu$. Wegen $\varkappa_\mu a_\mu \frown \varkappa_\nu a_\nu=0$ $(\mu \neq \nu)$ ist dann die Reihe $\varkappa_1 a_1+\varkappa_2 a_2+\cdots$ konvergent. Daher ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.

Satz 8. Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt ist, so ist jedes positive lineare Funktional P auf $\mathfrak{M}$ stetig.

Beweis. Es sei eine Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu=0$. Setzt man für eine positive Zahl $\varepsilon(<1)$

$$p_\nu=(a_\nu-\varepsilon a_1)_+ ,$$

1) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul, Jour. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **4** (1942), 201–382, Definition 1.1.

2) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Japanese Jour. Math. **17** (1941), 425–511, Definition 7.3.

3) H. Nakano: Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul, Proc. **18** (1942), 548–552, Definition 2.