46. Über die Umkehrbarkeit der Ideale im Integritätsbereiche.

Von Noboru NAKANO.
Mathematisches Institut, Hirosima Universität.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May, 12, 1943.)

In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass ein beliebiges Ideal $(\neq (0))$ im Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ umkehrbar ist, wenn $\mathfrak{J}$ den folgenden Bedingungen[1] genügt:

(i) die Existenz mindestens eines Primidealteilers[2] von gegebenem Ideal[3]

(ii) die Umkehrbarkeit der Primideale.

Aus dem gewonnenen Ergebnis folgt ohne weiteres die bemerkenswerte Tatsache, dass die Umkehrbarkeit der Primideale den 0-Satz und den abgeschwächten U-Satz liefert.

In den folgenden Untersuchungen setzen wir keinen Kettensatz voraus, und um die dadurch entstandenen Schwierigkeiten zu überwinden, versuchen wir überzugehen vom gegebenen Ideal $\mathfrak{a}$ zu dem „halbprimen" Ideal $\mathfrak{h}$[4], das aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz in $\mathfrak{a}$ liegt.

Wie wir bei der Schlussbemerkung erwähnen, ist es nicht immer nötig, dass $\mathfrak{J}$ Integritätsbereich mit Einheit und ohne Nullteiler sei, sondern es genügt, dass $\mathfrak{J}$ nur ein kommutativer Ring mit Einheitselement ist.

Zunächst führen wir den Begriff der Umkehrbarkeit eines Ideals ein. Ist $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{J}$, so bedeutet $\mathfrak{a}^{-1}$ das Ideal[5] aller der Körperelemente, deren Produkte mit sämtlichen Elementen von $\mathfrak{a}$ in ganze Elemente sich verwandeln; nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subseteqq \mathfrak{J}$. Wenn insbesondere $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{J}$, so heisst $\mathfrak{a}$ „*umkehrbar*".

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$, so dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{b}$ ist.

Beweis. Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1} \subseteqq \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{J}$; also ist $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}$ ein ganzes

---

1) Wir können Bedingung (i) vernachlässigen, wenn wir beim Wohlordnungssatz Hilfe suchen. vgl. W. Krull: Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. Bd. **101** (1929), s. 732.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein vom Einheits- und Nullideal verschiedenes Primideal.

3) In diesem Falle bedeutet ein gegebenes Ideal ein vom Einheitsideal verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{J}$.

4) S. Mori: Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz. Jour. Sci. Hiroshima Univ. **3** (1933), s. 275.

5) Nämlich das Krullsche „$\mathfrak{J}$-Ideal". vgl. W. Krull: Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie. Enz. Math. Wiss. Bd. 1 Heft **5** (1939).

Diejenigen Ideale, die echte Untermengen von $\mathfrak{J}$ sind, heissen ganz. Aber das $\mathfrak{J}$-Ideal muss nicht immer ganz sein. Im folgenden, unter Ideal verstehen wir stets ganzes Ideal, und in der Terminologie über $\mathfrak{a}^{-1}$ sollte man Modul statt Ideal schreiben.