59. *Sur une constante de la transformation conforme.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématique, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1943.)

M. Teichmüller a démontré le théorème suivant[1]:

Soit $\zeta=\zeta(w)$ *une fonction régulière dans le cercle d'unité:* $|w|<1$, *et supposons qu'elle soit univalente dans le même cercle. Soit, encore,* γ *un segment recitligne qui est transversale*[2] *du domaine transformé du cercle* $|w|<1$ *par la transformation* $\zeta=\zeta(w)$. *Nous avons alors*

$$\int_\gamma \log\frac{1}{|w|}\,|d\zeta|\leq cl$$

où l *désigne la longueur de* γ *et* c *une constante indépendante de la fonction* $\zeta(w)$.

M. Teichmüller a démontré qu'on peut poser

$$c=2+\max\left\{\log\frac{1}{\delta},\ \log\frac{2(1+\delta)^3}{(1-\delta)^4}\right\},\qquad 0<\delta<1,$$

et a conjecturé d'ailleurs que la meilleur valeur de c sera atteinte par la fonction:

$$\zeta=\frac{w}{1+w^2}$$

qui est univalente dans $|w|<1$, et qui transforme la partie de l'axe réelle située dans le cercle d'unité: $-1\leq Rw\leq+1$, $Jw=0$, dans le segment: $-\frac{1}{2}\leq R\zeta\leq+\frac{1}{2}$, $J\zeta=0$, et par suite, on aura

$$c=2\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{1+\sqrt{1-4\zeta^2}}{2\zeta}\,d\zeta=\frac{\pi}{2}.$$

Le but de cette Note est de montrer qu'*on peut poser* $c=\frac{\pi}{2}$, *de sorte que la conjecture de M. Teichmüller se réalise.*

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que γ est le segment: $-\frac{1}{2}\leq R\zeta\leq+\frac{1}{2}$, $J\zeta=0$. En effet, sinon, nous n'avons qu'à poser

$$\zeta^*=\frac{1}{(\zeta_1-\zeta_2)}\left(\zeta-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right),$$

---

1) O. Teichmüller: Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre, Deutsche Mathematik, Jg 2, 1937, pp. 96–107.

2) c. à d. un segment rectiligne contenu dans le domaine sauf deux extrémités qui sont situées sur la frontière.