107. Über die masstreuen Abbildungen in Produkträumen.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Es sei $(\Omega, \boldsymbol{B}, m)$ ein Massraum mit $m(\Omega)=1$: also die Zusammenfassung eines abstrakten Raumes Ω, eines Borelschen Mengenkörpers $\boldsymbol{B}$ von Teilmengen von Ω und eines vollständig-additiven Masses m auf $\boldsymbol{B}$; und T sei eine masstreue Abbildung auf Ω. $(\Omega', \boldsymbol{B}', m')$ sei ferner ein anderer Massraum und T' sei eine masstreue Abbildung auf Ω'. Wir definieren auf dem Produktraum

(1) $$\bar{\Omega}=\Omega \times \Omega', \quad \bar{\Omega} \ni \bar{\omega}=(\omega, \omega'), \quad \omega \in \Omega, \quad \omega' \in \Omega'$$

die Abbildung $\bar{T}=T \times T'$ durch

(2) $$\bar{T}\bar{\omega}=(T\omega, T'\omega'),$$

dann ist $\bar{T}$ eine masstreue Abbildung auf dem Produktraum $(\bar{\Omega}, \bar{\boldsymbol{B}}, \bar{m})$, wobei $\bar{\boldsymbol{B}}$ der kleinste $E \times E'$ $(E \in \boldsymbol{B},\ E' \in \boldsymbol{B}')$ enthaltende Borelsche Mengenkörper und $\bar{m}$ das Produktmass $m \times m'$ auf $\bar{\boldsymbol{B}}$ ist. In der vorangehenden Note haben wir uns mit dem Fall beschäftigt, wo T vom Mischungstypus im witerein Sinne ist.[1] In der vorliegenden Note soll der allgemeine Fall spektraltheoretisch untersucht werden.

Es sei G die additive Gruppe (mod. 2π) aller Eigenwerte λ von T: $x_\lambda(T\omega)=e^{i\lambda}x_\lambda(\omega)$, $\left(0 \neq x_\lambda \in L^2(\Omega)\right)$. Entsprechend sei G' bzw. $\bar{G}$ die Gruppe der Eigenwerte von T' bzw. $\bar{T}$.

Satz 1. $\bar{G}$ ist das Kompositum von G und G':

$$\bar{G}=\{G, G'\}=\{\lambda+\lambda';\ \lambda \in G,\ \lambda' \in G'\}.$$

Satz 2. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\bar{T}$ ergodisch ist, ist folgende:

(i) *T und T' sind ergodisch,*

(ii) $G \frown G'=0$.[2]

Korollar 1. Falls T und T' vom Mischungstypus im weiteren Sinne (d. h. T und T' ergodisch und $G=G'=0$) sind, so ist auch $\bar{T}$ vom Mischungstypus im weiteren Sinne.

Korollar 2. Falls T vom Mischungstypus ist, so ist für jede

---

1) Über die masstruen Abbildung vom Mischungstypus im weiteren Sinne, diese Proc., **19** (1943), 518–522.

2) Ein bekannter Spezialfall ist der folgende: es seien Ω bzw. Ω' die reelle Menge (0.1], $\boldsymbol{B}$ bzw. $\boldsymbol{B}'$ die Gesamtheit aller Borelschen Menge auf (0,1] und m bzw. m' das Lebesguesche Mass. Es seien ferner $T\omega=\omega+\lambda$ (mod. 1) und $T'\omega'=\omega'+\lambda'$ (mod. 1). Die Bedingungen (i), (ii) im Satz 2 sind folgende: (i) λ und λ' sind irrational, (ii) λ/λ' ist irrational. Denn G bzw. G' ist in diesem Falle $\{n\lambda'$ (mod. 1)$\}$ bzw. $\{n\lambda'$ (mod. 1)$\}$ und die Bedingung $G \frown G'=0$ bedeutet, dass $m\lambda=n\lambda'$ $(m, n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ niemals gilt.