

106. Über die masstreuen Abbildungen vom Mischungstypus im weiteren Sinne.

Von Yukiyoſi KAWADA.

Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

1. In der vorliegenden Note sollen einige Eigenschaften der masstreuen Abbildungen vom Mischungstypus im weiteren Sinne mengentheoretisch begründet werden.

Es sei Ω ein abstrakter Raum, \mathcal{B} ein Borelscher Mengenkörper der Teilmengen von Ω und m ein vollständig-additives Mass auf \mathcal{B} mit $m(\Omega)=1$. Im folgenden bezeichnen wir solchen Raum mit (Ω, \mathcal{B}, m) und nennen ihn ein Massraum. T sei eine masstreue Abbildung von Ω , d. h. eine eineindeutige Abbildung von Ω auf sich, so dass TE und $T^{-1}E \in \mathcal{B}$ und $m(E)=m(TE)$ für jedes $E \in \mathcal{B}$ gilt.

T heisst *ergodisch*, falls aus $m(E \ominus TE)=0$ ¹⁾ ($E \in \mathcal{B}$) entweder $m(E)=0$ oder $m(E)=1$ folgt. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden äquivalent :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_E(T^k \omega) = m(E)$$

fast überall auf Ω für jedes $E \in \mathcal{B}$, wobei $c_E(\omega)$ die charakteristische Funktion von E bedeutet; oder aber, für jede $A, B \in \mathcal{B}$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k A \cap B) = m(A)m(B).$$

T heisst *vom Mischungstypus im weiteren Sinne*, falls für jede $A, B \in \mathcal{B}$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |m(T^k A \cap B) - m(A)m(B)|^2 = 0$$

gilt. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden äquivalent: für jede $A, B \in \mathcal{B}$ gibt es eine Teilmenge $\{n'\}$ von $\{n\}$ mit der Dichte 1, so dass

$$(4) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} m(T^{n'} A \cap B) = m(A)m(B)$$

gilt.²⁾

Nun sei $(\Omega', \mathcal{B}', m')$ ein anderer Massraum und T' eine masstreue Abbildung auf Ω' .

$$\bar{\Omega} = \{\bar{\omega} = (\omega, \omega') ; \omega \in \Omega, \omega' \in \Omega'\} = \Omega \times \Omega'$$

sei das Produktraum von Ω und Ω' , $\bar{\mathcal{B}}$ sei der kleinste Borelsche Mengenkörper, der $E \times E' = \{\bar{\omega} = (\omega, \omega') ; \omega \in E, \omega' \in E'\}$ ($E \in \mathcal{B}, E' \in \mathcal{B}'$) enthält, und $\bar{m} = m \times m'$ sei das Produktmass von m und m' , d. h. ein

1) \ominus bedeutet die symmetrische Differenz: $A \ominus B = A \cup B - A \cap B$.

2) Vgl. etwa E. Hopf, Ergodentheorie, (1937).