104. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme VII.**

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, Nov. 12, 1943.)

§ 21 *Graduierter Verband.* Ein Verband L heisst *quasigraduiert* nach der Vereinigung, wenn jedem Quotient a/b in L eine reelle (einschließlich unendliche) Zahl $d(a/b) \geq 1$ zugeordnet ist, die den folgenden Bedingungen erfüllt: 1) $d(a/b) \leq d(a/c)$, $d(b/c) \leq d(a/c)$, $d(a/c) \leq d(a/b)$ $d(b/c)$ für $a \geq b \geq c$; 2) $d(a \cup a'/b) \leq d(a/b) d(a'/b)$ für $a, a' \geq b$; 3) $d(a/a)$ ist endlich. Damit dual ist der Begriff der Quasigraduierung nach dem Durchschnitt, der durch 1), 3) und 2′) $d(b/a \cap a') \leq d(b/a)$ $d(b/a')$ für $b \geq a, a'$ definiert wird. Eine Quasigraduierung heisst eine *Graduierung*, wenn $d(a/b) < d(a/c)$ für $a \geq b > c$ und $d(b/c) < d(a/c)$ für $a > b \geq c$.

In einem dualen Hauptideal $[b]$ eines nach der Vereinigung quasigraduierten Verbandes L bilden die sämtlichen Elemente a mit endlichen $d(a/b)$ ein Ideal L_b, da nach 1) $d(a \cap a'/b) \leq d(a/b)$ für jedes a' aus $[b]$ ist. Ist $a \in L_b$, so ist ferner nach 1) $L_a \leq L_b$. Wenn man umgekehrt für jedem dualen Hauptideal $[b]$ ein Ideal L_b angeben kann, so daß $L_a \leq L_b$ für $a \in L_b$ ist, so kann man L stets quasigraduieren. Man setze z. B. $d(a/b) = 1$ für $a \in L_b$, sonst $d(a/b) = \infty$. Für die folgenden Untersuchungen gebrauchen wir nur die Möglichkeit der Bestimmung der Ideale L_b, also nur die Quasigraduierbarkeit des Verbandes.

Es sei nun L ein nach der Vereinigung quasigraduierter Verband, $\mathfrak{L} = \{b_i\}$ eine Untermenge von L und $a \geq b_i$ für jedes i. Gibt es $b = b_1 \cup \cdots \cup b_r$ mit endlichem $d(a/b)$, so heisst a algebraisch über $\mathfrak{L}$. Dann gilt: 1) b_i ist algebraisch über $\mathfrak{L}$. 2) Ist a algebraisch über $\mathfrak{L}$ und ist jedes Element aus $\mathfrak{L}$ algebraisch über einer Untermenge $\mathfrak{L}$, so ist a algebraisch über $\mathfrak{L}$. Ist nämlich $d(a/b)$ mit $b = b_1 \cup \cdots \cup b_r$ endlich und ist $d(b_i/c_i)$ mit $c = \bigcup_j c_{ij}$ endlich, so ist $d(b_i/c)$ mit $c = \bigcup_{i,j} c_{ij}$ nach der Voraussetzung 1) endlich, also ist $d(b/c)$ nach 2) endlich, folglich ist $d(a/c)$ nach 1) endlich.

Der Verband aller Untergruppen einer Gruppe wird graduiert nach dem Durchschnitt, wenn $d(A/B)$ für Untergruppen A, B den Index von B in A bedeutet. Der Verband aller Normalteiler wird dann zugleich nach der Vereinigung graduiert. Im Fall der Abelschen Gruppe ist also der Verband aller Untergruppen sowohl nach dem Durchschnitt als auch nach der Vereinigung graduiert.

Ist Ω ein Körper, so wird der Verband aller Unterkörper von Ω graduiert nach der Vereinigung, wenn $d(K_1/K_2)$ für Unterkörper $K_1 \geq K_2$ den Grad von K_1 über K_2 bedeutet. Ist Ω ein Intergritätsbereich, so wird der Verband aller Unterbereiche von Ω quasigraduiert

* I-VI in Proc. **17** (1941), 323-327; **18** (1942), 179-184, 227-232, 276-279; **19** (1943), 120-124, 259-263.