130. *Sur la métrique riemannienne et l'élément de volume dans les espaces de groupes de Lie.*

Par Makoto ABE.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

§ 1. On sait qu'il existe dans l'espace d'un groupe de Lie G au moins une métrique riemannienne invariante par le premier et le second groupes des paramètres, lorsque G est semi-simple et clos (compact). La même chose arrive evidemment, quand G est un groupe commutatif. Nous allons faire voir dans le prochain § 2 que ces deux types de groupes sont essentiellement les seuls jouissant de cette propriété.

Nous considérerons ensuite dans le § 3 le problème correspondant au sujet du volume invariant dans G.

D'autre part, à un groupe de Lie quelconque G on peut attacher deux connexions affines au parallélisme absolu et, en général, avec torsion, en prenant pour transports parallèles les transformations de l'un ou l'autre groupe des paramètres[1]. Ces deux connexions définissent les mêmes géodésiques, à savoir, les sous-groupes à un paramètre du groupe G ou leurs transformés par les transformations du (premier) groupe des paramètres. A côté de ces deux connexions affines, il y en a une troisième, comportant les mêmes géodésiques, mais qui est sans torsion et, en général, avec courbure[2]. C'est précisément cette connexion, que définissent les métriques riemanniennes dans les groupes du type considéré dans § 2. Nous allons enfin déterminer complètement dans le dernier § 4 le type des groupes, dont la connexion affine sans torsion peut être définie par une métrique riemannienne.

§ 2. Soit G un groupe de Lie connexe. Une métrique riemannienne, qui se conserve par toutes les transformations du premier groupe des paramètres est complètement déterminée, dès qu'elle est définie à l'élément unité ; il suffit de la transporter au point arbitraire de G au moyen de la transformation du groupe des paramètres[3].

---

1) E. Cartan : La géométrie des groupes de transformations, J. de math. (9) VI (1927), p. 1–119. Chap. II.

2) E. Cartan : l. c. Chap. III.

3) Cela peut être exprimé analytiquement de la manière suivante : Soit O l'élément unité, P le point infiniment voisin de O, représenté par une transformation infinitésimale $\sum e^i X_i$. Une métrique soit définie au voisinage de O par

$$\overline{OP}^2 = \varphi(e) = \sum g^0_{ij} e^i e^j.$$

Désignons maintenant par $\sum \omega^i X_i$ la transformation infinitésimale $S_a^{-1} S_{a+da}$, où ω^i sont des formes de Pfaff des paramètres du groupe $a^1, \cdots\cdots, a^r$, leurs coefficients étant fonctions des a^i. Si l'on transporte la métrique $\varphi(e)$, définie au point O, au point arbitraire S_a de G, la distance entre deux points infiniment voisins S_a et S_{a+da} sera donnée par

$$\overline{S_a S_{a+da}}^2 = \varphi(\omega) = \sum g^0_{ij} \omega^i \omega^j = \sum g_{ij}(a) da^i da^j ;$$

ainsi se détermine $g_{ij}(a)$ au point arbitraire de G.