129. Über die multiplikative Gruppe einer $\mathfrak{p}$-adischen Divisionsalgebra.

Tadasi NAKAYAMA und Yozô MATSUSHIMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

In dieser Note betrachten wir die Struktur der multiplikativen Gruppe einer Divisionalgebra D über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper. Unser Hauptziel ist eine Vermutung von Herrn T. Tannaka[1] zu beweisen, dass ein Element aus D zur Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe von D gehört, wenn seine (reduzierte) Norm in bezug auf das Zentrum gleich 1 ist (Satz 1). Dieser Satz lässt sich dann verhältnismässig leicht auf den Fall einer einfachen Algebra übertragen (Satz 2). Ferner zeigen wir, dass die Einheitengruppe von D ein endliches System von Erzeugenden im Sinne der ganzen rationalen p-adischen Exponenten besitzt (Satz 3), was das Gegenstück zur Existenz eines solches im gewöhnlichen Sinne in der Einheitengruppe einer rationalen Divisionsalgebra[2] bildet.

1.[3] Es sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, π ein Primelement von K. D sei eine normale Divisionalgebra über K vom Grade n, und Π ein Primelement von D derart $\Pi^n=\pi$. Es gibt in D einen über K unverzweigten und zyklischen Maximalteilkörper W, und D hat die zyklische Erzeugung:

$$D=(\pi, W, \sigma)=W+W\Pi+\cdots+W\Pi^{n-1},$$
$$\Pi\xi\Pi^{-1}=\xi^\sigma(\xi\in W), \qquad \Pi^n=\pi,$$

wo σ ein erzeugender Automorphismus von W über K ist. Die absolutirreduzible Darstellung von D wird durch die Zuordnung

$$\xi\to\begin{pmatrix}\xi & & & \\ & \xi^\sigma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{\sigma^{n-1}}\end{pmatrix}(\xi\in W), \qquad \Pi\to\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \pi & & & & 0\end{pmatrix}$$

gegeben. Also ist allgemein dem Elemente $a=\alpha_0+\alpha_1\Pi+\cdots+\alpha_{n-1}\Pi^{n-1}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \pi\alpha_{n-1}^\sigma & \alpha_0^\sigma & \cdots & \alpha_{n-2}^\sigma \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \pi\alpha_1^{\sigma^{n-1}} & \pi\alpha_2^{\sigma^{n-1}} & \cdots & \alpha_0^{\sigma^{n-1}}\end{pmatrix}$$

---

1) T. Tannaka, Sijo-Sugaku-Danwakai **236** (1942).

2) M. Eichler, Über die Einheiten der Divisionsalgebren, Math. Ann. **114** (1937). Vgl. auch O. F. G. Schilling, Einheitentheorie in hyperkomplexen Systemen, Crelle **175** (1936).

3) Für die Folgenden vgl. H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), oder M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. **4** (1935).