128. Über den Operatorenring Banachscher Räume.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Banachscher Raum (kurz B. R.), und $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ der Ring aller beschränkten linearen Operatoren von $\mathfrak{X}$. M. Eidelheit[1] hat bewiesen, dass aus dem Ringisomorphismus von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}_1)$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}_2)$ der Isomorphismus[2] von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ folgt; dass also die Struktur des Raumes $\mathfrak{X}$ durch die des Ringes $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ charakterisiert wird. In dieser Hinsicht haben auch S. Kakutani und G. Mackey[3] eine Charakterisierung der Operatorenringe Hilbertscher Räume gegeben. In dieser Note sollen nun einige Eigenschaften von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ aufgestellt werden, und daraus die Sätze von Eidelheit und von Kakutani-Mackey aufs neue hergeleitet werden.

1. Es sei $\mathfrak{X}$ ein reeller oder komplexer B. R. mit Elementen $x, y, \dots$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ sei die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren A von $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ein Ring mit der Multiplikationseinheit I $(Ix=x)$. Ferner ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ein B. R. in bezug auf die Norm $\|A\|=\sup_{|x|=1}\|Ax\|$, und es gilt $\|AB\|\leqq\|A\|\cdot\|B\|$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist also ein nichtkommutativer normierter Ring.

Lemma 1. Für jedes minimale Linksideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ gibt es ein beschränktes lineares Funktional f_0 von $\mathfrak{X}$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Operator $A\in\mathfrak{A}$ ordnet sich eineindeutig ein Element $y\in\mathfrak{X}$ zu, so dass

$$Ax=f_0(x)\cdot y \tag{1}$$

gilt. Dabei ist ersichtlich $\|A\|=\|f_0\|\cdot\|y\|$. Falls $\|f_0\|=1$ ist, dann wird durch die Zuordnung: $A\leftrightarrow y$ in (1) *eine Äquivalenz $\mathfrak{X}\cong\mathfrak{A}$[4] vermittelt. Dieser Isomorphismus lässt sogar $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ als Linksoperatorenbereich zu. Umgekehrt ist die Gesamtheit aller Operatoren A, die durch die Formel* (1) *für ein bestimmtes f_0 definiert wird, ein abgeschlossenes minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$.*

Beweis. Es sei $A_1\in\mathfrak{A}$ und $A_1z_1\neq 0$. Dann gibt es ein lineares Funktional f_1 mit $f_1(z_1)\neq 0$. Für einen durch $A_0x=f_1(x)\cdot y_1$ definierten Operator A_0 gilt $A_0A_1x=f_1(A_1x)\cdot y_1$, und $A_0A_1z_1=f_1(z_1)\cdot y_1\neq 0$. Da $\mathfrak{A}$ minimal ist, muss $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}(\mathfrak{X})A_0A_1$ sein, d. h.

$$\mathfrak{A}=\big(A_y\,;\ A_yx=f_0(x)y,\ y\in\mathfrak{X}\big)\,,\qquad f_0(x)=f_1(A_1x)\,.$$

Die Gleichung $BA_yx=f_0(x)\cdot By=A_{By}x$ zeigt den Operatorisomorphismus von $\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{X}$. Die Umkehrung ist klar.

---

1) M. Eidelheit, On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math., **9** (1939), 97–104.

2) Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, (1932), S. 180.

3) Vgl. S. Kakutani, Über den Verband und Ring Banachscher Räume, (Japanisch), Isô-Sûgaku, **5** (1943), 1–11.

4) $\cong$ zeigt die Äquivalenz und $\simeq$ zeigt den Isomorphismus von Banachschen Bäumen. Vgl. loc. cit. 2), S. 180.