126. Über die Pellsche Gleichung.

Von Sigekatu KURODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität, Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Ein Satz aus der klassischen Zahlentheorie besagt, dass jeder Modultransformation

$$\theta=\frac{p\theta+q}{r\theta+s}, \qquad ps-qr=\pm 1$$

von einer quadratischen Irrationalzahl θ in sich selbst, welche zur positiven Diskriminante D gehört, ein-eindeutig eine Lösung t, u der Pellschen Gleichung

$$t^2-Du^2=\pm 4 \tag{1}$$

entspricht. Von Herrn Takagi[1] wurde einmal hervorgehoben, dass diese ein-eindeutige Beziehung durch $E=r\theta+s$ bewerkstelligt wird, wobei $E=\frac{t+u\sqrt{D}}{2}$ ist. Wenn also die Zahl θ im Gaussschen Sinne reduziert und

$$\theta=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_{n-1}}+\frac{1}{\theta}=\frac{*}{q_n\theta+q_{n-1}} \tag{2}$$

die primitive Periode der Kettenbruchentwicklung derselben ist, so ist

$$E_0=q_n\theta+q_{n-1}$$

diejenige Zahl, welche der kleinsten positiven Lösung t_0, u_0 von (1) im obigen Sinne entspricht.

Es sei nun speziell $\theta=\frac{k_0+\sqrt{D}}{2}$, wobei k_0 die grösste, nicht $\sqrt{D}$ übersteigende ungerade oder gerade Zahl sei, je nachdem $D\equiv 1$ oder $0 \pmod{4}$. Dann ist θ ersichtlich reduziert und überdies sind die Teilnenner $k_1, \ldots, k_{n-1}$ von (2) wegen eines Satzes von Galois symmetrisch, so dass $k_\nu=k_{n-\nu}$ $(\nu=1, \ldots, n-1)$.

Ist $NE_0=+1$, so ist n gerade, etwa $n=2l$. Es sei also

$$\left\{\begin{aligned} &\theta=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_{l-1}}+\frac{1}{\eta}=\frac{*}{q_l\eta+q_{l-1}}, \\ &\eta=k_l+\frac{1}{k_{l-1}}+\cdots+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{\theta}=\frac{*}{q\theta+q'}, \quad \eta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a>0) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

gesetzt, wobei $q=[k_{l-1}, \ldots, k_1]=q_l$, $q'=[k_{l-1}, \ldots, k_2]$. Dann ist nach Takagi

1) Vgl. Takagi: On the Theory of Indeterminate Equations of the Second Degree in Two Variables. Bullet. Calcultta Math. Soc. Vol. XX, 1928-29 oder Syotô Seisûron Kôgi, 1931, S. 249.