

**125. Über die Existenz einer Untergruppe, deren
Ordnung ein Produkt von zwei verschiedenen
Primzahlpotenzen ist.**

Von Kiyosi TAKETA.

Mathematisches Institut, National Universität Peking.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Sei \mathcal{G} eine Gruppe, deren Ordnung g durch mindestens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist; sei \mathfrak{P} die zu p zugehörige Sylowgruppe von \mathcal{G} und p^a , $a \geq 1$, ihre Ordnung.

Wenn die Ordnung des Normalisators \mathfrak{N} von \mathfrak{P} einen von p verschiedenen Primfaktor q besitzt, so hat die zu q zugehörige Sylowgruppe der Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$, als eine Untergruppe von \mathcal{G} betrachtet, die Ordnung der Gestalt $p^a q^b$, $ab \neq 0$.

Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$, so gibt es gerade g/p^a konjugierte Untergruppen $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_{g/p^a}$, von \mathfrak{P} , und es sind die zwei Fälle möglich:

- (i) Entweder sind je zwei von den \mathfrak{P}_i , $i=1, 2, \dots$, g/p^a teilerfremd,
- (ii) oder nicht.

Im Falle (ii) nimmt man an, daß \mathfrak{P}' diejenige Untergruppe von \mathcal{G} deren Ordnung eine Potenz von p ist, welche nicht in \mathfrak{P} enthalten ist und mit \mathfrak{P} den Durchschnitt \mathfrak{D} von der maximalen Ordnung besitzt. Dann muß die Ordnung des Normalisators \mathfrak{N}' von \mathfrak{D} durch mindestens eine von p verschiedene Primzahl teilbar sein. Denn sonst würde $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{P}$, gegen die Annahme, von einer höheren Ordnung als \mathfrak{D} sein, weil \mathfrak{D} so wie in \mathfrak{P} als auch in \mathfrak{P}' die von sich verschiedenen Normalisatoren hat. Also kann man wie beim Falle \mathcal{G}/\mathfrak{N} ersehen, daß \mathfrak{N}' eine Untergruppe von der Ordnung $p^a q^b$, $ab \neq 0$, hat.

Im Falle (i) hat \mathcal{G} nach einem Satze von Frobenius einen Normalteiler \mathcal{G}' vom Index p^a . Wenn g/p^a gleich einem Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist, so ist \mathcal{G}' die verlangte Untergruppe¹⁾; und hat g/p^a mehr als zwei verschiedene Primfaktoren, so kann man auf \mathcal{G}' dasselbe Verfahren wie bisher anwenden, und durch Wiederholung dieses Schlußverfahrens ersieht man, daß \mathcal{G} eine Untergruppe, deren Ordnung ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist, besitzt.

Die bisherigen Ergebnissen fassen wir zusammen in

Satz 1: *Jede Gruppe \mathcal{G} , deren Ordnung g mindestens zwei verschiedene Primfaktoren besitzt, hat stets eine Untergruppe der Ordnung, die gleich einem Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist. Ist insbesondere p^a die höchste Potenz von einer Primzahl p , die in g aufgeht, so hat \mathcal{G} entweder einen Normalteiler vom Index p^a oder eine Untergruppe der Ordnung $p^a q^b$, $ab \neq 0$, wobei q eine von p verschiedene Primzahl ist.*

Wenn speziell \mathcal{G} keine echte Untergruppe als die p -Gruppen hat,

1) Ist $g/p^a = q^b$, so ist \mathcal{G} schon von der verlangten Gestalt.