5. Bemerkungen über die p-wertigen Funktionen.

Von Tokunosuke YOSIDA.
Marineingenieurschule.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 12, 1944.)

Herr L. Bieberbach hat den folgenden Satz[1] bewiesen:

$$w(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

sei in $|z|>1$ *schlicht und regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqq 1 .$$

In der folgenden Zeilen wollen wir zunächst diesen Satz etwas erweitern und mit Hilfe des erweiterten Satzes einige Eigenschaften der p-wertigen Funktionen untersuchten. Die p-wertige Funktion ist die, welche keinen Wert mehr als p-mal annimmt.

Satz 1. $$w(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

sei in $|z|>1$ *regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol und* $\big(w(z)\big)^p$ *in* $|z|>1$ *p-wertig. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqq 1 .$$

Beweis. Es sei $r>1$, und R so gross dass das Bild C_R auf der w-Ebene des Kreises $|z|=R$ durch die Funktion $w=w(z)$ einfach ist und das Bild von dem Kreis $|z|=r$ durch dieselbe Funktion völlig im Innen enthält. Der Kreis $|z|>1$ wird auf der Riemannsche Fläche W abgebildet.

Es sei $A(R)$ der Flächeninhalt des von C_R umgeschlossene Flächenstückes $B(R)$ auf der w-Ebene und $A(r,R)$ der Flächeninhalt des Bild $B(r,R)$ auf W von dem Kreisring $r<|z|<R$.

Da $\big(w(z)\big)^p$ p-wertig ist, so ist die Anzahl der Wurzeln in $r<|z|<R$ von der Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{p-1}\Big(w(z)-\alpha e^{\frac{2\nu\pi i}{p}}\Big)=0$$

nicht grösser als p für beliebige α. Wenn damit die Anzahl der über α liegenden Punkte auf $B(r,R)$ k ist, so liegen keine Punkte von $B(r,R)$ über die mindestens $(k-1)$ Punkte aus $\alpha e^{\frac{2\pi i}{p}}, \alpha e^{\frac{4\pi i}{p}}, \cdots, \alpha e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}}$
Daher ist

---

1) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, (1927).