46. *Sur les fonctions multivalentes.*

Par Akira KOBORI.
Daisan Kôtô-Gakkô.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 12, 1944.)

1. Considérons la famille (M_p) de fonctions

$$w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots \tag{1}$$

holomorphes et p-valentes dans le cercle-unité $|z|<1$. Si l'on pose

$$\{w(z^2)\}^{-\frac{1}{2p}}=\frac{1}{z}+b_1z+b_3z^3+\cdots+b_{2n-1}z^{2n-1}+\cdots$$

on peut écrire

$$\frac{w(z)}{z^p}=(1+b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots)^{-2p}$$

d'où on a

$$\left|\sqrt[2p]{\frac{z^p}{w(z)}}-1\right|=|b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots|.$$

Si $|z|=r\ (<1)$

$$|b_1z+b_3z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots|$$
$$\leqq|b_1|r+|b_3|r^2+\cdots+|b_{2n-1}|r^n+\cdots$$

D'après le théorème de Schwarz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|b_{2\nu-1}|r^\nu\leqq\{\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)|b_{2\nu-1}|^2\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^{2\nu}}{2\nu-1}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Or, nous pouvons démontrer

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)|b_{2\nu-1}|^2\leqq 1. \tag{2}$$

et nous avons

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^{2\nu}}{2\nu-1}=\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}.$$

Donc on a

$$\left|\sqrt[2p]{\frac{z^p}{w(z)}}-1\right|\leqq\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}.$$

Par suite, si $r\leqq 0.833\ldots$, on a[1)]

$$|w(z)|\leqq\frac{r^p}{\left(1-\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\right)^{2p}}. \tag{3}$$

Choisissons maintenant les valeurs de r de telle sorte qu'elles satisfassent l'inégalité

1) J'ai lu ce résultat et celui qui suit au séminaire (le 5 fév. 1944) de l'Institut de Mathématique de l'Université de Kyôtô.