42. *Über die Harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, (I).*

Von Kunihiko KODAIRA.

Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by TAKAGI, M.I.A., April 12, 1944.)

I. Existenz der Harmonischen Tensorfelder mit gegebenen Perioden.

Die Beziehung zwischen Topologie und Tensorfeld auf Mannigfaltigkeiten ist schon von mehreren Autoren untersucht worden[1]. Im folgenden geben wir davon eine kurze Zusammenfassung, wobei aber bemerkt werden soll, dass man eine formal übersichtlichere Theorie bekommt, wenn man dem Tensorbegriff den dazu dualen Begriff der Tensordichte gegenüberstellt. Der „obere Randoperator $\mathfrak{r}^*$" operiert auf Tensorfelder; der „untere Randoperator $\mathfrak{r}$" auf Tensordichte. Erst in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wo wegen der mittels Metrik bestimmten Zuordnung der Unterschied zwischen den beiden Begriffen sozusagen verschwindet, lassen sich die Operatoren $\mathfrak{r}^*$ und $\mathfrak{r}$ beide auf Tensorfelder operieren. Harmonisch heisst dasjenige Tensorfeld e, wofür $\mathfrak{r}e=\mathfrak{r}^*e=0$ gilt[2]. In diesem Teil I beweisen wir die Existenz der überall regulären harmonischen Tensorfelder mit gegebenen Perioden. Dabei bedienen wir uns der Weylschen „Methode der orthogonalen Projektion"[3]. Den Beweis eines dabei benötigten wichtigen Lemmas, das bei Weyl nur im Fall des Euklidischen Raumes aufgestellt ist, tragen wir im § 4 nach. Die Tensorfelder mit Singularitäten betrachten wir im Teil II. Es wird sich zeigen, dass mit unserer Methode auch die klassischen Theoreme der Existenz der Abelschen Integrale auf der Riemannschen Fläche sich leicht beweisen lassen.

§ 1. *Kombinatorische Topologie der Homologie-Mannigfaltigkeiten.* Zunächst erinnern wir uns an einige fundamentalen Eigenschaften der Homologie-Mannigfaltigkeiten. Es sei $K=K^n$ ein n-dim. endlicher simplizialer Komplex, t^ρ ein ρ-dim. Simplex von K. Die ρ-dim. algebraischen Komplexe mit reellen Koeffizienten auf K bezeichnen wir mit $A^\rho, C^\rho, \Phi^\rho$, etc.; $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}^*$ sei unterer bzw. oberer Randoperator[4]; $[t^\rho : t^{\rho-1}]$ Inzidenzzahlen; dann gilt

$$\mathfrak{r}t^\rho = \Sigma[t^\rho : t^{\rho-1}]t^{\rho-1}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{r}^*t^\rho = \Sigma[t^{\rho+1} : t^\rho]t^{\rho+1}\,. \tag{1.1*}$$

---

1) U. a. von G. de Rham, E. Cartan, W. V. D. Hodge. Siehe insbesondere G. de Rham: Über mehrfache Integrale, Abh. Math. Sem. Hans. Univ. **12** (1938), 313-339, wo auch Literatur angegeben wird.

2) Hodge nennt das „harmonic integral". W. V. D. Hodge: Proc. London Math. Soc. Ser. 2 Vol. 36, 257-303; Vol. 38, 72-95; Vol. 41, 483-496.

3) H. Weyl: Method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. Jour. Vol. 7 (1940), 411-444.

4) Vgl. H. Freudenthal: Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie, Annals of Math. (2), Vol. 38 (1937), 647-655.