40. *Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. II. Les espaces de Riemann.*

Par Makoto ABE.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1944.)

Nous avons étudié dans la Note précédente[1] (citée dans la suite par "R I") la structure des espaces à connexion affine, dont les groupes d'holonomie laissent invariante la direction d'un plan à p dimensions. Nous allons maintenant considérer en particulier le cas des espaces riemanniens.

§ 1. *La réductibilité complète des espaces riemanniens.*

Soit V^n un espace riemannien à n dimensions. Le groupe d'holonomie g de V^n est alors un groupe (connexe) des déplacements euclidiens et le groupe γ (Voir R I) un groupe (connexe) des transformations orthogonales. Par suite γ est complètement réductible. Si γ laisse donc un p-plan Σ^p fixe, il laisse aussi fixe le $(n-p)$-plan Σ^{n-p} perpendiculaire à Σ^p. L'espace étant sans torsion, il existent alors (R I, § 4) dans V^n une famille à $n-p$ paramètres des p-plans E^p parallèles entre eux et une famille à p paramètres des $(n-p)$-plans E^{n-p} parallèles entre eux, de sorte que chaque E^p de la première famille est perpendiculaire à chaque E^{n-p} de la deuxième. Si l'on adopte donc un système de coordonnées $u^1, \dots, u^n$, tel que les E^p soient donnés par

$$u^{p+1}=\text{const}, \dots, u^n=\text{const},$$

et les E^{n-p} par

$$u^1=\text{const}, \dots, u^p=\text{const},$$

la connexion affine de cet espace prendra la forme suivante (R I, § 4)

$$(1)\qquad \begin{cases} dP=du^ie_i+du^\alpha e_\alpha, \\ de_i=\Gamma^k_{ij}du^je_k, \\ de_\alpha= \qquad\qquad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}du^\beta e_\gamma, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &i, j, k=1, \dots, p, \\ &\alpha, \beta, \gamma=p+1, \dots, n, \end{aligned}$$

les coefficients, $\Gamma^j_{i\alpha}, \Gamma^\beta_{i\alpha}$ s'annulant identiquement. De plus, la métrique de V^n sera de la forme

$$(2)\qquad ds^2=g_{ij}du^idu^j+g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta,$$

parce que $g_{i\alpha}=e_ie_\alpha=0$ à cause de la perpendicularité des deux familles des plans.

Maintenant nous allons faire voir que *les g_{ij} ne dépendent que des variables u^i $(i=1, \dots, p)$ et les $g_{\alpha\beta}$ que des u^α $(\alpha=p+1, \dots, n)$.* En effet, il résulte des identités

1) M. Abe: Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. I. Les espaces à connexion affine, Proc. **20** (1944), 56-60.