55. Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von Kunihiko KODAIRA.

Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1944.)

§ 1. *Vorbereitung*[1]. In vorliegender Note betrachten wir lineare elliptische Differentialausdrücke $L(u)$ für die Funktion $u(x^1, x^2, \dots, x^n)$, welche als Eulersche Variationsausdrücke aus einem quadratischen Integral:

$$E(u)=\int\Big(\sum a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^k}+2u\sum b_j\frac{\partial u}{\partial x^j}+cu^2\Big)dx^1dx^2\dots dx^n$$

entstehen, und behandeln die Rand- und Eigenwertprobleme der Differentialausdrücke $L(u)$ für ein beschränktes offenes Gebiet $\mathfrak{M}$ des $(x^1, x^2, \dots, x^n)$-Raumes nach der Weylschen „Methode der orthogonalen Projektion"[2]. Dabei sind a_{jk}, b_j, c als genügend reguläre, beschränkte Funktionen in $\mathfrak{M}$ vorausgesetzt[3], und es soll eine positive Konstante k geben, sodass in jeder Stelle von $\mathfrak{M}$ für beliebige Parameter $u, u_1, u_2, \dots, u_n$ die Ungleichung:

$$\sum a_{jk}u_ju_k+2u\sum b_ju_j+cu^2\geqq k\sum u_j^2 \tag{1.1}$$

gilt. Es ist zweckmässig, $\mathfrak{M}$ als eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik: $ds^2=g_{jk}dx^jdx^k$ aufzufassen, welche mit a_{jk} mittels der Relation: $\sqrt{g}\,g^{jk}=a_{jk}$ verknüpft wird. Dementsprechend setzen wir $b_j=\sqrt{g}\,p^j$, $c=\sqrt{g}\,q$; es wird also

$$E(u)=\int(g^{jk}\partial_ju\partial_ku+2up^j\partial_ju+qu^2)\sqrt{g}\,dG,$$

wobei $\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ und $dG=dx^1dx^2\dots dx^n$ gesetzt wird. Nun führen wir als Hilfsmittel „*Skalar-Vektoren*" $\Phi, \Psi, \dots$ mit $n+1$ Komponenten:

$$\Phi=(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

ein, und setzen für beliebiges Teilgebiet G aus $\mathfrak{M}$

$$(u, v)_G=\int_G uv\sqrt{g}\,dG,$$

$$(\Phi, \Psi)_G=\int_G(g^{jk}\varphi_j\psi_k+\varphi p^j\psi_j+\psi p^j\varphi_j+q\varphi\psi)\sqrt{g}\,dG.$$

---

1) Vgl. R. Courant und D. Hilbert: Meth. d. Math. Physik II, Kap. VII.

2) H. Weyl: Method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. Journ. Vol. 7 (1940), 411–444.

3) Eine Funktion heisst regulär, wenn sie bis zur genügend hohen Ordnung stetig differenzierbar ist. Vgl. J. Hadamard: Lectures on Cauchy's problem, pp. 11–12.