121. *Bemerkungen über den Untergruppensatz in freien Produkte.*

Von Mutuo TAKAHASI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Es sei ein freies Produkt $\mathfrak{G}$ von beliebigen Gruppen $\mathfrak{G}_a$, Kömponenten genannten, gegeben (im Zeichen: $\mathfrak{G}=\overset{*}{\prod\limits_{a\in\Gamma}}\mathfrak{G}_a$). Dabei möge die Mächtigkeit n der Indexmenge $\Gamma=\{a\}$ auch ganz beliebig sein.

Über die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen hat A. Kurosch zuerst den sogenannten Untergruppensatz bewiesen. Er bewies nämlich:[1] Jede Untergruppe eines freien Produktes $\mathfrak{G}$ ist ein freies Produkt, dessen Komponenten eine freie Gruppe und zu Untergruppen der Komponenten von $\mathfrak{G}$ konjugierten Gruppen sind.

Demnächst haben R. Baer und F. Levi durch einen topologischen Beweis den Satz wesentlich verschärft. Ihr Beweis liefert nämlich eine Zerlegung mit möglichst grossen zu Untergruppen der Komponenten von $\mathfrak{G}$ konjugierten Komponenten und diese Zerlegung hat für manche Anwendungen wichtige Eigenschaften, insbesondere ist sie in gewissem Sinne eindeutig und liefert den Beweis des Verfeinerungssatzes, dass irgend zwei freie Produktzerlegungen einer Gruppe isomorphe Verfeinerungen besitzen[2].

In der vorliegenden Arbeit soll derselbe Satz als folgendes formliert und von neuem mit Hilfe der schon im Fall der freien Gruppe benutzten Beweismethode[3] bewiesen werden. Dieser Beweis gestattet auch die Beziehung zwischen der Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{G}$ und der von der Untergruppe $\mathfrak{U}$ zu geben. Ferner erhält man als einen Spezialfall die bekannte Schreiersche Gleichung $N=j(n-1)+n$, wobei n die Erzeugendenanzahl einer freien Gruppe $\mathfrak{G}$ und N die von ihrer Untergruppe $\mathfrak{U}$ mit dem endlichen Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ bedeutet. (§ 3)

Der Satz lautet:

Untergruppensatz. *Es sei $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}=\overset{*}{\prod}\mathfrak{G}_a$ mit dem Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$. Dann gibt es eine Zerlegung von $\mathfrak{U}$:*

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{F}*\overset{*}{\prod_{a,\,r_{a\nu}}}(\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}),$$

so dass 1.) *$\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe mit $j(n-1)+1-\sum d_a$ Erzeugenden und* 2.) *$r_{a\nu}(\nu=1,2,\dots,d_a)$ die geeignet ausgewählten Regräsentanten*

1) A. Kurosch, Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann, **109** (1934) S. 647. Vgl. auch: Über freie Produkte von Gruppen, Math. Ann. **108** (1933) S. 26.

2) R. Baer und F. Levi, Freie Produkte und ihre Untergruppen, Compositio Math **3** (1936) S. 391.

3) Vgl. etwa K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig, (1932), F. Levi, Über die Untergruppen der freien Gruppen, Math. Zeitschr. **32** (1930) S. 315, **37** (1933) S. 90.