117. *Une méthode opérationnelle dans la théorie des nombres naturels.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Le but de cette note est de développer la théorie axiomatique de G. Peano sur les nombres naturels au point de vue des opérations. Une opération que je dis ici est une correspondance univoque qui fait correspondre un nombre naturel à chaque celui, et je définis l'addition et la multiplication de deux nombres naturels par les compositions des opérations que nous les appelons linéaire et additives respectivement. Alors, l'associativité de l'addition et de la multiplication sont obtenue sans peine par celle de la composition des opérations et de même pour la distributivité. La commutativité de l'addition et de la multiplication sont démontrées par l'unicité des opérations. Ce méthode n'est pas essentiellement distincte de celle considérée ordinairement dans la théorie des nombres naturels de G. Peano, mais il nous parait que l'addition et la multiplication des nombres naturels sont données plus naturellement par la notion des opérations.

1. Soit N l'ensemble de tous les nombres naturels détérminés par le système des axiomes de G. Peano[1]. Quand une opération $F(x)$ définie sur N et dont le contre-domaine est situé dans N remplit la condition

$$F(x')=\big(F(x)\big)'$$

pour tout nombre naturel x, elle s'appelle linéaire. Par exemple $F(x)=x'$ et $I(x)=x$ définies sur N tout entier sont linéaires. Nous avons d'abord sur elles le

Théorème 1. *Toute opération linéaire $F(x)$ est déterminée complètement par $F(1)$.*

Démonstration. Soient $F(x)$ et $G(x)$ les opérations linéaires telles qu'on ait $F(1)=G(1)$. L'ensemble M des nombres naturels x tels qu'on ait $F(x)=G(x)$ satisfait aux conditions a) et b) de V. En effet, on a par la supposition $F(1)=G(1)$ et donc $1 \in M$. Puis, $x \in M$ entraine $F(x)=G(x)$ et par suite $\big(F(x)\big)'=\big(G(x)\big)'$ d'après II, ce qui donne par

---

1) Le système des axiomes de G. Peano sur les nombres naturels est bien connu, mais pour le citer, nous le posons ici.

I. 1 est un nombre naturel.

II. A chaque nombre naturel x, il existe précisément un nombre naturel appelé le suivant de x et désigne par x'. Pour deux nombres naturels x et y, $x=y$ entraine $x'=y'$.

III. On a toujours $x' \neq 1$ pour tout nombre naturel x.

IV. Pour deux nombres naturels x et y, $x'=y'$ entraine $x=y$.

V. Soit M un ensemble des nombres naturels tels qu'on ait

a) $1 \in M$, b) $x \in M$ entraine $x' \in M$.

Alors, M contient tous les nombres naturels.