# 115. *Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, III.*

Von Hiraku TÔYAMA.
Mathematisches Institut, Tokyo Kogyo Daigaku.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Das Abelsche Theorem und die Lösbarkeit des Jacobischen Umkehrproblems welche die wichtigste Rolle in der Theorie der algebraischen Funktionen spielen, lassen sich algebraisch als die Dualität zwischen der Bettischen Gruppe und der Divisorenklassengruppe nullter Ordnung auf der geschlossenen Riemannschen Fläche ausdrücken[1]. Diese Auffassung führt naturgemäss zur Verallgemeinerung auf den nicht-abelschen Fall, d. h. zur Aufstellung der Dualität zwischen der Fundamentalgruppe und der Halbgruppe der allgemeinen Divisorenklassen. Dafür genügt, wie die bisherigen Ergebnisse[2] zeigen, ein Dualitätssatz Tannakascher Art[3] hinsichtlich der Fundamentalgruppe. Doch konnte ich, wegen der topologischen Schwierigkeit, jenen Satz nur unter einer funktionentheoretischen Stetigkeitsbedingung beweisen, die nicht rein algebraisch-topologisch, aber vom Standpunkte der Funktionentheorie nicht unnäturlich ist.

Hilfssatz 1. *Wenn eine Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ $(p>1)$ *gegeben ist, so gibt es stets eine treue unitäre Darstellung* 2-*ter Ordnung, die vorgeschriebene Eigenwerte in Verzweigungspunkten hat, und sich auf die volle unitäre Gruppe* 2-*ter Ordnung überalldicht abbilden lässt.*

Beweis Wie in der Uniformisierungstheorie wohlbekannt, ist die Fundamentalgruppe als die Fuchssche Gruppe treu dargestellt[4]. Wenn die Matrixgleichung $A_1^{\alpha_2}B_1^{\beta_1}A_2^{\alpha_2}\dots C_l^{r_l}=E$ für ein Gruppenelement $t=a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}a_2^{\alpha_2}\dots c^{r_l}$ alle unitären Darstellungen als :Lösungen zulässt, so hat sie alle komplexen Darstellungen als Lösungen (nach der Methode der unitären Beschränkung), d. h. gegen die obige Tatsache. Also in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_u$ aller unitären Darstellungen ist die der Gleichung $T_t=E$ entsprechende Menge $\mathfrak{M}_t$ nirgendsdicht. Somit kann die Gesamtheit aller abzählbaren $\mathfrak{M}_t$ nicht die ganze $\mathfrak{M}_u$ überdecken. So gibt es eine treue unitäre Darstellung, und überdies unter diesen kann man solche $A_1$ und $B_1$ wählen, (nach analogem Schlusse), so dass

$$A_1=G^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}G \qquad B_1=H^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix}H,$$

---

1) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, (1923), 130.

2) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de mathématiques pures et appliquées, **17** (1938), 47–87.

H. Tôyama, Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, Proc. **19** (1943), 415–419, und II (erscheint demnächst in diesem Journal).

3) T. Tannaka, Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Math. Journ. **45** (1938), 1–12.

4) Freilich ist die Fuchssche Gruppe eine projektive, so ist eine geringe Modifikation nötig.

5) D. h. diese Gruppe ist „maximally almost periodic" im Sinne von J. v. Neumann; Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445-492.