111. *Einige Darstellungen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen auf konforme Abbildung.*

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

1. *Herglotzsche Darstellung.* Wir betrachten zuerst die Familie derjenigen im Grundgebiet $|z|<1$ regulär analytischen Funktionen $\{\Phi(z)\}$, für welche die Größe

$$\rho(r,\varphi)=\int_0^{\varphi}\Re\Phi(re^{i\theta})d\theta \qquad (0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq r<1)$$

als Funktion von φ für alle $r<1$ gleichmäßig beschränkt und von beschränkter Schwankung ist. Dann läßt sich nach einem Hellyschen Satz eine monoton wachsende Zahlenfolge $\{r_n\}$, $r_n\to 1$ $(n\to\infty)$, so auswählen, daß die Limesfunktion

$$\rho(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\rho(r_n,\varphi)$$

höchstens bis auf eine Nullmenge von φ existiert und selbst beschränkt und von beschränkter Schwankung ist. Somit ergibt sich bekanntlich die Poisson-Stieltjessche Darstellung nach Herglotz

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\rho(\varphi)+i\Im\Phi(0).$$

Die genannten Bedingungen für $\rho(r,\varphi)$ sind gewiß dann erfüllt, falls entweder $\Re\Phi(re^{i\varphi})$ einerseits oder $\int_0^{2\pi}|\Re\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta$ beschränkt bleibt.

2. *Darstellung für $zf''(z)/f'(z)$ und verwandte Größen.* Wir nehmen nun an, daß eine Funktion $f(z)$ im Einheitskreis regulär analytisch und im abgeschlossenen Einheitskreis stückweise regulär sei. Sie verhält also in $|z|\leqq 1$ abgesehen von gewissen endlich vielen Randpunkten

$$z=e^{i\varphi_\mu}\quad(\mu=1,\dots,m),\quad 0<\varphi_1<\cdots<\varphi_m\leqq 2\pi,$$

regulär und besitzt in jedem solchen Punkte beide bestimmte Grenzwerte $\lim f'(e^{i\varphi})$ für $\varphi\to\varphi_\mu-0$ sowie für $\varphi\to\varphi_\mu+0$. Ferner setzen wir jetzt voraus, daß ihre Ableitung $f'(z)$ überall in $|z|\leqq 1$ höchstens bis auf solche Ausnahmerandpunkte nullstellenfrei sei. Bezeichnen wir die Sprunghöhe längs der Peripherie von $\arg f'(e^{i\varphi})$ im Punkte $e^{i\varphi_\mu}$ mit

$$(1-\alpha_\mu)\pi=\arg\frac{f'(e^{i(\varphi_\mu+0)})}{f'(e^{i(\varphi_\mu-0)})},$$

so ist die Funktion