108. Über stochastischen Prozess. I[1].

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Der unstetige stochastische Prozess.

A. Khintchine hat den unstetigen stochastischen Prozess behandelt unter den quantitativen Voraussetzungen über Wahrscheinlichkeit[2]. In dieser Abhandlung wollen wir diese Aufgabe durch das topologische Mass[3] nur unter den qualitativen Voraussetzungen erörtern: Wenn 1) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenichstens ein Ereignis in einem Zeitintervall der Länge t eintritt, mit $t \to 0$ gegen 0 konvergiert; und 2) Ereignisse mehr als eins nicht gleichzeitig eintreten kann bis auf Wahrscheinlichkeit Null, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n Ereignisse im Zeitintervall (t_1, t_2) eintreten, durch die Poissonsche Verteilung: $\frac{1}{n!}\Big(\lambda(t_2)-\lambda(t_1)\Big)^n e^{-(\lambda(t_2)-\lambda(t_1))}$ gegeben, wobei $\lambda(t)$ eine monoton wachsende stetige Funktion von t ist. Unsere Methode lässt sich ohne weiters auf den stetigen stochastischen Prozess anwenden und ist einfacher als die von J.L. Doob[4].

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung[5]. Ein regulärer bikompakter Raum $\mathfrak{R}$ heisst ein *Wahrscheinlichkeitsraum*, wenn ein topologisches Mass $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{m}\mathfrak{R}=1$ definiert ist. Nach dem Erweiterungssatz[6] besitzt $\mathfrak{m}$ eine einzige totaladditive Erweiterung, die man mit P bezeichnet. Eine bis auf Nullmenge definierte, messbare Funktion φ auf $\mathfrak{R}$ heisst eine *zufällige Grösse*, deren Erwartung $E(\varphi)$ und Streuung $\sigma(\varphi)$ wie gewöhnlich[7] mit

$$E(\varphi)=\int_R \varphi dP, \qquad \sigma(\varphi)^2=E(\varphi^2)-E(\varphi)^2$$

definiert, und die Funktion reeller Veränderlichen

$$F(\xi)=P\{x:\ \varphi(x) \leqq \xi\}$$

heisst die *Verteilungsfunktion* von φ. Endlich viele zufällige Grösen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa$ auf $\mathfrak{R}$ heisst *voneinander unabhängig*, wenn

---

1) Ausführliches erscheint in der Abhandlung: 中野秀五郎: 確率原理と確率過程 (應用數學).

2) A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. Math. II. 1933.

3) H. Nakano: Topologische Masse, Proc. Phys-Math. Soc. Japan, 25, 1943, 279–334, oder. 中野秀五郎: 測度論 (裳華房).

4) J. L. Doob: Stochastic process depending on a continuous parameter; Trans. Am. Math. 42, 1937, 107–140.

5) H. Nakano: Topologische Masse.

6) Vgl. 5) Satz 5.1 oder 中野秀五郎: 測度論.

7) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math. II. 1933.