136. Über die Untergruppen geschlossener Liescher Gruppen.

Von Ryoji SHIZUMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1944.)

Die Homologie-Eigenschaften von Gruppen-Mannigfaltigkeiten sind von mehreren Autoren in vollem Umfange untersucht worden;[1] es ist aber nicht daran zu zweifeln, dasz die topologische Eigenschaften der Gruppen-Mannigfaltigkeiten schärferen Bedingungen unterliegen. Hier liegt gewiss eine wichtige Aufgabe vor, die zur näheren Untersuchung ihrer Beziehungen zwingt. Im folgenden werden einige hierhergehörige Sätze bewiesen.

Der Rang einer geschlossenen Lieschen Gruppe G ist definitionsgemäss die grösste Zahl r von der Eigenschaft, dasz es in G eine r-dimensionale Abelsche Untergruppe gibt. Es ist nun folgendes bekannt: der Homologie-Schnittring $\mathfrak{R}(G)$ — in Bezug auf den Koeffizientenbereich der rationalen Zahlen — einer geschlossenen Gruppe G ist dimensionstreu isomorph dem Homologie-Ring eines topologischen Produktes

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r, \qquad r \geqq 1$$

wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind. Der Rang von G ist gleich der Anzahl der Faktoren in diesem Sphärenprodukt. Auf Grund dieses Satzes ergibt sich insbesondere:

Die Summe der Bettischen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Range r ist gleich 2^r (Cartan).

1. Für das Weitere ist es angebracht, den Begriff der Pontrjaginschen Produktbildung einzuführen. Wir beginnen mit der Erklärung des singulären Simplexes in der Gruppen-Mannigfaltigkeit G[2]. Es ist bekanntlich der Inbegriff zweier Bestandteile, nämlich erstens eines r-dimensionalen Euklidischen Simplexes T, zweitens einer eindeutigen und stetigen Abbildung f von T in G. Wir bezeichnen sie mit $f(T)$. Zwei Parameterdarstellungen $f(T)$, $f'(T')$ sind äquivalent oder stellen dasselbe singuläre Simplex dar, wenn T und T' isomorph sind, und zwar so, dass es eine solche nicht-singuläre affine Abbildung τ von T auf T' gibt, dass erstens $T'=\tau(T)$ ist, und zweitens die durch τ bestimmte Abbildung zwischen f und f' die Beziehung $f=f'\tau$ herstellt. Ein singuläres Simplex wird orientiert, indem das Urbild T orientiert wird. Ein singulärer r-dimensionaler algebraischer Komplex besteht aus endlich vielen singulären r-dimensionalen Simplexen von G, deren jedes mit einer bestimmten Orientierung und einer bestimmten

1) Ich nenne neben Cartan vor allem Pontrjagin und Hopf. Vgl. L. Pontrjagin: Homologies in compact Lie groups, Rec. Math. **6** (1939), 389-422., sowie

H. Hopf: Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math. **42** (1941), 22-32.

2) Vgl. hierzu, S. Lefschetz: Singular and continuous complexes, chains and cycles. Rec. Math. **3** (1936), 271-285