129. *Sur les espaces a connexion affine qui peuvent représenter les espaces projetifs des paths.*

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 13, 1944.)

§ 1. M. O. Veblen[1] a défini la géométrie projective généralisée comme la théorie des invariants des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$[2] satisfaisant aux conditions

$$(1.1) \qquad (a)\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}, \qquad (b)\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,0}=0^{3)}, \qquad (c)\ \Pi^{\lambda}_{0\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu},$$

par rapport aux transformations de coordonnées de la forme

$$(1.2) \qquad \bar{x}^0=x^0+\log\rho\,(x^1,x^2,\dots,x^n), \qquad \bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,x^2,\dots,x^n),$$

la loi de transformations des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, pendant les transformations de coordonnées (1.2), étant

$$(1.3) \qquad \bar{\Pi}^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{\partial\bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\mu}\partial\bar{x}^{\nu}}\right).$$

En regardant les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ comme étant les composantes de la connexion d'un espace A_{n+1} à connexion affine à $(n+1)$ dimensions, M. J. H. C. Whitehead[4] a étudié les propriétés caractéristiques de l'espace A_{n+1} qui peut représenter l'espace P_n à connexion projective de M. O. Veblen.

Si l'on introduit, dans l'espace à connexion affine A_{n+1}, un champ de vecteur ξ^{λ} ayant les composantes

$$(1.4) \qquad \xi^{\lambda}=\delta^{\lambda}_0,$$

on voit facilement que ce vecteur a toujours les mêmes composantes dans tous les systèmes de coordonnées liés les uns aux autres par les transformations de la forme (1.2). En se servant de ce champ de vecteur, on peut mettre les conditions (1.1) sous les formes tensorielles suivantes :

$$(1.5) \qquad (a)\ S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}-\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}=0, \qquad (b)\ \Pi^{\ \lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=0, \qquad (c)\ \xi^{\lambda}_{;\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu},$$

---

1) O. Veblen: Generalized projective geometry. Journal of the London Math. Soc. **4** (1929), 140–160.

2) Les indices $\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma,\dots,\lambda,\mu,\nu,\dots\\ i,j,k,\dots\dots\end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases}0,1,2,\dots,n,\\ 1,2,\dots\dots,n.\end{cases}$

3) La virgule désigne la dérivée partielle ordinaire et le point-virgule la dérivée convariante.

4) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces. Annals of Math. **32** (1931), 327–360. Voir aussi, K. Yano: Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **24** (1938), 395–464.