144. Über normale antilineare Transformationen.

Von Kiiti MORITA.

Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1944.)

Eine wichtige Verallgemeinerung der linearen Transformationen bilden die antilineare Transformationen. Das Ziel der vorliegenden Note ist den Begriff der normalen antilinearen Transformationen einzuführen und dann einige Sätze zu beweisen, die die Analoga der bekannten Sätze über normale lineare Transformationen sind.

1. *Definitionen und Sätze.* Im folgenden handelt es sich hauptsächlich um quadratische Matrizen mit den Elementen aus dem Körper aller komplexen Zahlen. Die transponierte bzw. konjugiert-komplexe Matrix von einer Matrix A sei mit A' bzw. $\bar{A}$ bezeichnet.

In dem n-dimensionalen, komplexen Vektorraum $\mathfrak{M}$ definieren die Formeln

$$x_j'=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{x}_k\,, \qquad j=1,2,\dots,n$$

eine antilineare Transformation, die mit $[A]$ bezeichnet werden soll, wobei $A=(a_{jk})$ gesetzt ist. Zwei antilineare Transformationen $[A]$, $[B]$ in $\mathfrak{M}$ mögen einander ähnlich genannt werden, wenn es eine reguläre Matrix P des Grades n gibt, so dass die Gleichung $P^{-1}A\bar{P}=B$ besteht. Ist dabei P eine unitäre Matrix, d. h. gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U'AU=B$ gilt, so heissen $[A]$ und $[B]$ einander *unitärähnlich.*

Definition. Ist $[A]$ mit $[A']$ vertauschbar, d. h. ist das Produkt $[A][A']$ gleich dem Produkt $[A'][A]$, so heisst $[A]$ eine *normale antilineare Transformation.*

Definition. Eine Matrix A heisst *quasinormal,* wenn die Relation $A\bar{A}'=A'\bar{A}$ besteht.

Die Beziehung zwischen diesen Definitionen ist klar; $[A]$ ist dann und nur dann normal, wenn A eine quasinormale Matrix ist. Für eine unitäre Matrix U sind die antilineare Transformationen $[A]$ und $[U'AU]$ gleichzeitig normal oder nicht normal. Symmetrische, schiefsymmetrische, unitäre sowie reell-normale Matrizen sind alle quasinormal. Daher mögen die quasinormalen Matrizen als eine Verallgemeinerung der reell-normalen Matrizen angesehen werden.

Nun gilt der folgende

Satz 1. Für eine quasinormale Matrix A des Grades n gibt es stets eine unitäre Matrix U des gleichen Grades, so dass die Matrix $U'AU$ die Gestalt