PAPERS COMMUNICATED

140. Les anneaux des opérateurs et les dimensions, II[1].

Par Motokiti KONDÔ.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1944.)

Le but de cette note est discuter la structure du module des dimensions d'un anneau des opérateurs et introduire la notion des dimensions sur les idéaux de celui-ci.

12. Pour cela, nous considérons d'abord la somme directe (L_1) des espaces linéaires et celle des opérateurs.

Pour un ensemble Λ infini, nous introduissons une mesure $m(\Gamma)$ complètement additive sur les sous-ensembles de Λ telle qu'on ait $m\big((\lambda)\big)=1$ pour tout élément λ de Λ et puis étant donné un espace linéaire $\mathfrak{B}$ normé et complet, nous prenons une somme directe (L_1)[2] $\mathfrak{S}=\sum_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ des espaces $\mathfrak{B}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, où $\mathfrak{B}_\lambda=\mathfrak{B}$ $(\lambda\in\Lambda)$.

Pour deux éléments μ et ν de Λ, nous désignons par $P_{\mu\nu}$ un opérateur linéaire et borné sur $\mathfrak{S}$ tel qu'on ait

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)&=0 & \text{pour}\quad \rho\neq\mu,\\ &=f\oplus\sum_{\lambda\neq\nu}\oplus 0 & \text{pour}\quad \rho=\mu,\end{aligned}$$

et par $\mathscr{B}$ l'anneau des opérateurs déterminé par $P_{\mu\nu}(\mu,\nu\in\Lambda)$ et l'opérateur identique I.

(12.1) Le commutateur borné $\mathscr{B}'$ consiste des sommes directes $(L_1)\sum_{L_1}\oplus A_\lambda$ des opérateurs $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, où $A_\lambda=A_\mu$ l'un l'autre pour λ et μ de Λ.

En effet, pour un opérateur A de $\mathscr{B}'$ et un élément $f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0$[3] de $\mathfrak{S}$, il existe un élément g de $\mathfrak{B}_\rho$ tel qu'on ait $A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=g\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0$ et

$$\begin{aligned} A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\sigma}\oplus 0)&=AP_{\rho\sigma}(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=P_{\rho\sigma}A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)\\ &=P_{\rho\sigma}(g\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=g\oplus\sum_{\lambda\neq\sigma}\oplus 0,\end{aligned}$$

d'où A peut être écrit sous la forme $\sum\oplus A_\lambda$ et $A_\lambda=A_\mu$ l'un l'autre pour λ et μ de Λ. Inversement, tout opérateur de la telle forme appartient à $\mathscr{B}'$ et donc $\mathscr{B}'$ consiste de tels opérateurs.

C. Q. F. D.

---

1) Cette note est le continu de ma note du même titre que celle, parue dans ce journal et dont le numero est manqué. De plus, nous la citons dans la suite comme la partie I de cette note.

2) M. Kondô, Sur les sommes directes des espaces linéaires, parue dans ce journal.

3) Pour la simplicité, nous écrivons dans la suite $\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus f_\lambda$ au lieu de $\sum_{L_1}{}_{\lambda\in\Lambda}\oplus f_\lambda$.