

MORPHISMES DE STURM *

Jean Berstel

Patrice Séébold

Résumé

Un morphisme *sturmien* est un morphisme qui préserve les mots infinis sturmiens. Un morphisme est faiblement sturmien s'il préserve au moins un mot sturmien. Nous prouvons qu'un morphisme est sturmien si et seulement si l'image du mot $ba^2ba^2baba^2bab$ est un mot équilibré. Comme corollaire, nous obtenons qu'un morphisme faiblement sturmien est sturmien. Nous redémontrons aussi la description des nombres irrationnels dont la séquence caractéristique est point fixe d'un morphisme qui est sturmien.

Abstract

A morphism is called *Sturmian* if it preserves all Sturmian (infinite) words. It is *weakly Sturmian* if it preserves at least one Sturmian word. We prove that a morphism is Sturmian if and only if it keeps the word $ba^2ba^2baba^2bab$ balanced. As a consequence, weakly Sturmian morphisms are Sturmian. An application to infinite words associated to irrational numbers is given.

1 Introduction

Un mot infini (à droite) est *équilibré* si la différence entre le nombre d'occurrences d'une lettre dans deux de ses facteurs de même longueur est bornée par 1 en valeur absolue. Un mot est *sturmien* s'il est équilibré et non ultimement périodique.

Dans cette appellation ou sous d'autres dénominations, les mots de Sturm ont une longue histoire. Les premiers travaux remontent à J. Bernoulli et E. B. Christoffel. Ils sont mentionnés, avec ceux de A. A. Markov, dans le livre de Venkov [24]. D'autres exposés contenant une synthèse de travaux antérieurs sont ceux de Stolarsky [23] et tout récemment de T. C. Brown [4]. Le terme "sturmien" a été utilisé par Hedlund et Morse dans leurs développements de la dynamique symbolique [9, 10, 11]. D'autres appellations pour ces mots ou pour une sous-classe d'entre eux dont on parlera plus en détail sont : séquences de Beatty, "cutting sequences", séquences caractéristiques, spectre (homogène ou non), "two-distance sequences". Ces mots ont de nombreuses applications, par exemple en théorie ergodique [17], en infographie [2], en cristallographie [1] ou en reconnaissance des formes.

*Une version préliminaire de ce travail a été présentée à MFCS'93. Travail soutenu par le PRC "Mathématiques et Informatique" et par le projet ESPRIT BRA 6317 - ASMICS 2.

Received by the editors June 1993, revised January 1994.

Communicated by M. Boffa.

AMS Mathematics Subject Classification : 68R15, 20M05, 68Q45.

Keywords : infinite words, iterated morphisms, sturmian words, dynamical systems, continued fractions.