Triangle de Pascal, complexité et automates*

Jean-Paul Allouche Valérie Berthé

1 Introduction

À quoi reconnaît-on qu'une suite est plus ou moins "compliquée" ? Une des traductions mathématiques de ce terme vague consiste à compter les facteurs ou blocs qui apparaissent dans cette suite, (voir par exemple [2]). Il y a naturellement bien d'autres approches possibles, qui dépendent en particulier à la fois des applications qu'on a à l'esprit ... et des quantités que l'on sait calculer ou estimer pour une suite donnée. La même question peut aussi se poser pour une suite à deux (ou plusieurs) indices et nous nous proposons, à travers le choix de la suite double des coefficients binomiaux réduits modulo un entier, de décrire quelques approches possibles.

Plus précisément, si l'on représente la suite double $\left(\binom{m}{n} \bmod d\right)_{m,n}$ en noircissant ou non les carrés élémentaires du réseau $\mathbb{Z}^2$ suivant que $\binom{m}{n} \bmod d$ est non nul ou nul – ou bien si l'on représente les différentes valeurs de $\binom{m}{n} \bmod d$ par des carrés de différentes couleurs – on a l'impression que le dessin obtenu est "plus compliqué" lorsque d n'est pas une puissance d'un nombre premier que quand c'est une puissance d'un nombre premier (et un petit peu plus compliqué quand cette puissance est strictement supérieure à un que lorsqu'elle vaut un).

Dans cet article, nous nous proposons de rappeler quelques propriétés de la suite double $\left(\binom{m}{n} \bmod d\right)_{m,n}$ en termes d'engendrement par automate cellulaire, de propriétés de "renormalisation" et d'engendrement par automate fini, puis nous calculons la complexité par blocs rectangulaires de cette suite. Nous prouvons en particulier *une formule explicite pour la complexité lorsque d est un nombre premier p*, avec une expression particulièrement simple dans le cas $p = 2$: *le nombre de blocs rectangulaires différents de taille $u \times v$ qui apparaissent dans la suite double*

*Ce travail été réalisé avec le soutien partiel du Esprit-BRA Working Group 6317 *ASMICS*
Received by the editors May 95.
Communicated by M. Boffa.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 11B85, 05A10, 68R15, 68Q80.
Key words and phrases : Pascal's triangle, finite automata, cellular automata, complexity of infinite sequences.