

SUR LA COMPLEXITÉ DES SUITES INFINIES

Jean-Paul Allouche

Résumé

On appelle *complexité* d'une suite infinie à valeurs dans un ensemble fini, la fonction qui compte le nombre de facteurs de longueur donnée de cette suite. Nous proposons un catalogue de résultats sur la complexité de certaines suites ou classes de suites.

Abstract

The *complexity* of an infinite sequence taking its values in a finite set counts the number of factors (subwords) of given length of this sequence. We give a quick view of complexity results for different sequences or classes of sequences.

1 Introduction

L'intuition suivant laquelle une suite est d'autant plus "compliquée" qu'elle a "beaucoup" de facteurs différents peut être traduite par exemple dans la définition classique de la fonction de complexité d'une suite. Soit A un alphabet (ensemble fini), et $u = (u(n))_n$ une suite à valeurs dans A . On appelle *complexité* de u , et on note p_u la fonction qui compte le nombre de facteurs de u de longueur donnée. Autrement dit p_u est définie sur les entiers par

$$p_u(n) = \#\{w \in A^n; \exists k, w = u(k)u(k+1) \cdots u(k+n-1)\}.$$

Cette notion permet de définir *l'entropie topologique* d'une suite comme étant :

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_u(n)}{n \log \#A},$$

(cette limite existe toujours pour une suite infinie u). Notons que la complexité d'une suite u vérifie la double inégalité :

$$1 \leq p_u(n) \leq (\#A)^n,$$

et donc que son entropie vérifie :

$$0 \leq h(u) \leq 1.$$

Received by the editors April 1993, revised December 1993.

Communicated by M. Boffa.

AMS Mathematics Subject Classification : 68R15, 11B85.

Keywords : complexity, factors (subwords) of infinite words, substitutive sequences, automatic sequences, CDOL sequences.