

On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables

Juhani Karhumäki * Filippo Mignosi †
Wojciech Plandowski ‡

Abstract

A language (resp. a relation) is *expressible* by a word equation e if it is defined as the set of all values of an unknown (resp. a set of unknowns) over all solutions of the equation e . We first present some tools for proving that languages or relations are not expressible unless a certain number of auxiliary variables enter into the equation. As a consequence an infinite hierarchy - based on the number of auxiliary unknowns - of expressible language is established. Also the necessary number of auxiliary unknowns to encode a boolean combination of word equations into a single equation or inequality is considered. Finally, we present two new tools for establishing the nonexpressibility in general, and, as a consequence, we obtain a gap theorem for expressible languages.

Résumé

Un langage (resp. une relation) est *définissable* par une équation sur les mots e s'il est l'ensemble de toutes les valeurs prise par une variable (resp. un n -uplet de variables) quand on parcourt les solutions de e . On donne des méthodes pour prouver la non-définissabilité de langages ou relations par des équations qui utilisent un nombre fixé de variables auxiliaires. On obtient, comme conséquence, une hiérarchie infinie de langages définissable, hiérarchie basée sur le nombre de variables auxiliaires. On étudie le nombre de variables auxiliaires qui sont nécessaires pour coder une combinaison booléenne d'équations sur les mots en une unique equation. On introduit deux nouveaux outils pour prouver la non-définissabilité en général. Ces derniers permettent d'établir un "gap theorem" pour les langages définissables.

*Supported by Academy of Finland under grant 44087.

†Supported by Academy of Finland under grant 44087.

‡Supported in part by the grant KBN 8T11C03915 and in part by Academy of Finland under grant 44087.