

Exemples de suites de complexité inférieure à $2n$

Ali Aberkane

Résumé Dans ce travail, on étudie l'existence d'une classe de suites infinies de complexité comprise entre $n + 1$ et $2n$.

Dans un premier temps, on s'intéresse à regarder l'évolution des graphes de Rauzy de ce genre de suites, où on démontre que si on a une suite récurrente u de complexité $p(n) \leq \frac{4}{3}n + 1$, alors $s(n) = p(n+1) - p(n) \leq 2$, ce qui empêche d'avoir une évolution compliquée des graphes de Rauzy. Dans un deuxième temps, on donne quelques exemples de suites de complexité entre $n + 1$ et $2n$. À la fin, on démontre qu'on peut toujours construire des suites qui vérifient $\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n} \leq a$ ($1 < a \in \mathbb{R}$). C'est-à-dire qu'on peut toujours construire une suite de complexité très proche de $n + 1$ à partir d'un certain rang.

1 Introduction

Pour étudier un mot infini u défini sur un alphabet fini \mathcal{A} , on lui associe la fonction p_u , dite fonction de complexité de u , en notant $p_u(n)$ le nombre de facteurs de longueur n du mot u . Cette notion a été intensivement étudiée dans ces dernières années [2]. On associe aussi au mot u une famille de graphes (Γ_n) , où Γ_n (le graphe de Rauzy d'ordre n) est le graphe orienté dont les sommets sont les facteurs de longueur n de u et où il existe un arc entre deux sommets s'ils se succèdent dans le mot infini u (voir la définition plus loin).

Morse et Hedlund [12] ont montré que s'il existe un entier n_0 tel que $p_u(n_0) \leq n_0$, alors le mot infini u est ultimement périodique. Les mots intéressants sont donc ceux dont la complexité est telle que $p(n) \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les plus simples parmi ceux-ci sont les mots infinis de complexité $p(n) = n + 1$ pour tout n (un tel mot est appelé suite sturmienne). Ces mots sont donc les mots infinis de complexité minimale parmi les mots infinis non ultimement périodiques (voir [8], [13]). Les mots tels que $p(n) = n + k$ pour $n \geq n_0$ sont également été étudiés (suites quasi-sturmiennes).