Ueber Produktzerlegung der Ideale.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 9, 11, 1931.)

Bekanntlich ist es nicht allgemein möglich, jedes Ideal als Produkt von Primäridealen darzustellen. Es fragt sich demnach, in welchem Ring jedes Ideal sich stets als Produkt von Primäridealen darstellen lässt. Wir haben noch keine allgemeine Antwort auf diese Frage; in der vorliegenden Note wird aber eine Charakterisierung aller derjenigen Ringe gegeben, in denen das Produkt aller Primärkomponenten in jeder kürzesten Durchschnittsdarstellung eines Ideals stets gleich dem Ideal ist.

Zugrunde gelegt sei ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ mit Teilerkettensatz, und sei das Zeichen $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ immer eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Ein vom Einheitsideal $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal, das keinen echten Teiler ausser $\mathfrak{o}$ besitzt, heisst ein „*maximales Ideal,*" und unter dem „*maximalen Primideal*" verstehen wir ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal, das kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal als echten Teiler besitzt.

§ 1. Zur Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Als eine Verallgemeinerung eines Satzes[1] für den idempotenten Ring gilt der folgende

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal, und ist* $\mathfrak{b}$ *auch ein Ideal, so wird dann und nur dann*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,,$$

wenn es in $\mathfrak{b}$ *ein Element* b *gibt, derart, dass für jedes Element* a *aus* $\mathfrak{a}$

$$ab = a$$

ist.

(1) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Journal, 1 (1931), § 4.