Über die Produktzerlegung der Hauptideale.

Von

Shinziro Mori.

(Eingegangen am 20. 9. 1937.)

Für die Produktzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs ist Herr Schmidt(1) ohne Beweis zu folgendem Ergebnis gelangt:

Damit in einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass

1) jede mit einem Hauptideal beginnende Idealquotienten-kette im Endlichen abbricht,

2) $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen ist.

Dieser Satz hat meines Wissens noch keinen Beweis gefunden und er scheint mir ziemlich schwer. Im folgenden will ich das Problem nur für den speziellen Fall untersuchen, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt der in $\mathfrak{J}$ minimalen Primideale darstellbar ist.

Produktzerlegung der Hauptideale eines 0-Integritätsbereichs.

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit 0-Satz. Dann gilt in $\mathfrak{J}$ zunächst folgender Satz:

Satz 1. *Ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so besitzt jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ die folgenden Eigenschaften:*

1. *Jede Potenz von $\mathfrak{p}$ ist primär.*
2. *Kein Primärideal kann zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ eingeschoben werden.*

Nach dem Hauptidealsatz von Krull(2) ist jedes höchste Primideal eines Hauptideals (p) auch in $\mathfrak{J}$ minimal, und folglich existiert ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$. Da $\mathfrak{J}$ keinen echten Nullteiler hat, muss

---

(1) Fr. K. Schmidt, Über die Primidealzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs, Sitz.-Ber. München. Akad. Wiss. (1928), 285.

(2) W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 37.