Über Ringe, die den Durchschnittssatz gestatten.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am Juni 30, 1941.)

Bekanntlich gilt in beliebigen 0-Ringen der schöne von E. Noether(1) stammende

Durchschnittssatz: *In einem 0-Ring lässt sich jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellen,* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$.

Es war aber nicht bekannt, welche Bedingung für die Gültigkeit dieses Satzes notwendig und hinreichend sein soll. Vor kurzem hat E. Kamei(2) mit dieser Fragestellung sich beschäftigt, und gezeigt, dass in einem einartigen Ringe $\mathfrak{R}$ der Durchschnittssatz dann und nur dann gilt, wenn in $\mathfrak{R}$ der Q. O.-Satz gilt. In dieser Arbeit über den gleichen Gegestand wollen wir zeigen, dass dieser Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn wir den 0-Ring durch einen Ring ersetzen, in dem eine Primideal-Folge $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\cdots$ und eine Idealquotient-Folge $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\subset\cdots$ beide stets nur endlich viele verschiede Glieder besitzen.

Die Bezeichungen schliessen sich möglichst eng an die Arbeit von Krull(3) an.

Vorbereitende Sätze.

Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem folgende zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

Voraussetzung 1. *Ist eine Kette von Primidealen* $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\cdots$ *in* $\mathfrak{R}$ *gegeben und ist jedes* $\mathfrak{p}_{i+1}$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{p}_i$, *so bricht die Kette nach endlich vielen Gliedern ab.*

Voraussetzung 2. *Ist eine Kette von Idealquotienten* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\subset\cdots$ *gegeben, so müssen von einem gewissen* n *ab alle Glieder gleich sein.*

Zunächst führen wir den Begriff des zugehörigen Primideals eines Ideals ein, der in dieser Arbeit eine grosse Rolle spielt.

Definition. *Unter einem zum Ideal* $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R})$ *gehörigen Primideal verstenen wir ein Primideal* $\mathfrak{p}$, *zu dem für das gegebene Ideal* $\mathfrak{a}$ *ein solches Element* r *existiert, dass* $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r)$, $r\not\subset\mathfrak{a}$ *ist.*

---

(1) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. **83** (1921), 24.

(2) E. Kamei, Zum Durchschnittssatz in einartigen Ringen, Proc. Imp. Acad. Tokyo **XVII** (1941), 95.

(3) W. Krull, *Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie*, Enzy. der Math. Wiss. **I**$_1$ (1939).