

Über die Produktzerlegung der Hauptideale. IV.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 30. Okt., 1940.)

Will man die Struktur der kommutativen Ringe, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt, untersuchen, so stösst man auf eine unüberwindliche Schwierigkeit, weil beim Ring ohne Einheitsselement jedes im Ring minimale Primideal ein Hauptideal ist, aber beim Ring mit Einheitsselement es nicht mehr gilt. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, muss man die zwei Fälle im einzelnen behandeln. Für den zweiten Fall ist dieses Problem schon in den gleichnamigen Arbeiten⁽¹⁾ des Verfassers vollständig gelöst. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir den ersten Fall und die angedeutete Frage kommt endlich zum Abschluss.

Vorbemerkungen.

Fortan bedeutet Ring \mathfrak{R} dauernd einen allgemeinen kommutativen Ring ohne Einheitsselement.

Grundlegend für die vorliegende Arbeit sind die folgenden, von mir an anderer Stelle in weiterem Zusammenhang bewiesenen

Lemma I.⁽²⁾ *Ist \mathfrak{R} ein Ring, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt, und gibt es in \mathfrak{R} einen Nullteiler, so besitzt \mathfrak{R} nur endlich viele, in \mathfrak{R} minimale Primideale \mathfrak{p}_i ($i=1, 2, \dots, n$) und das Nullideal ist als Potenzprodukt dieser Primideale darstellbar.*

Lemma II.⁽³⁾ *Ist \mathfrak{R} ein Ring, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt, und besitzt \mathfrak{R} keinen Nullteiler, so ist jedes von (0) verschiedene Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler, in \mathfrak{R} minimaler Primideale darstellbar.*

Für die Durchführung unserer Untersuchung ist es auch nützlich, das folgende, bei dem speziellen Fall mit Einheitsselement⁽⁴⁾ schon bewiesene Lemma vorausszuschicken:

Lemma III. *Ist \mathfrak{R} ein Ring, in dem jedes Hauptideal als ein Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist, und besitzt \mathfrak{R} kein Ein-*

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. III. dieses Jour. **10** (1940), 85.

(2) loc. cit., 85.

(3) S. Mori, Allgemeine Z. P. I.-Ringe, dieses Jour. **10** (1940), 118.

(4) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. I. dieses Jour. **8** (1938), 7.