Allgemeine Z. P. I.-Ringe.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 18. Mai 1940.)

In der allgemeinen Idealtheorie der kommutativen Ringe ist es bekanntlich eine grund-legende Frage, in wie weit der einfache Zerlegungsatz in Primideale (Z. P. I.),[1] der etwa im Bereich der ganzen Zahlen gilt, sich auf allgemeinere kommutative Ringe übertragen lässt. Zu dieser Frage haben die Untersuchungen von Herren M. Sono,[2] E. Noether,[3] W. Krull,[4] u. a. schon sehr bemerkenswerte Resultate geliefert. Leider stützen alle diese Untersuchungen sich auf Grund der Voraussetzung, dass der zugrunde gelegte Ring ein O-Ring mit Einheitselement ist. Aber vor kurzem hat K. Kubo[5] erst die angedeutete Frage zum Abschluss gebracht.

In der vorliegenden Arbeit sollen die wichtigen Struktursätze der Ringe (der allgemeinen Z. P. I.-Ringe), in denen die Eindeutigkeit für die Zerlegung in Primideale nicht vorausgesetzt wird, und die Theorie, welche alle obig angedeuteten Ergebnisse als einen speziellen Fall umfasst, stichhaltig untersucht werden. Zu diesem Zwecke dürfen wir niemals irgendwelche besondere Annahme über die zugrunde gelegten Ringe machen. Damit wird die Existenz des Einheitselementes hinfällig und die Nullteiler treten in die Grundringe frei ein. Mit dieser Tatsache würde unsere Untersuchung ungeheuer schwerfällig. Ich möchte in der Theorie der Ringe ohne Einheitselement, die seit beinah zehn Jahren in meiner Arbeiten entwickelt wird,

---

(1) Zerlegungsatz in Primideale: Im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ der ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers kann jedes Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale dargestellt werden.

(2) M. Sono, On Congruences. II., Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. **3** (1918), 113.

(3) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann., **96** (1926), 26.

Um aus der eindeutigen Zerlegung in Primideale ihre fünf Axiome zu erschliessen, ist folgende Bedingung vorausgesetzt:

Bedingung. *Die Primideale in $\mathfrak{R}$ besitzen keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler und umgekehrt sind alle Ideale, die keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Teiler besitzen, prim.*

In Z. P. I.-Ringe ist aber diese Voraussetzung von Noether nur eine einfache Umformung der Voraussetzung des 0-Satzes, wie wir aus Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ leicht sehen können.

Beim Beweise von E. Noether wird die Existenz des Einheitselementes offenbar vorausgesetzt.

(4) W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 12, 86. W. Krull, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Bd. I_1, Heft 5, 28.

(5) K. Kubo, Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, dieses Jour. **10** (1940), 77.