Über die Produktzerlegung der Hauptideale. III.

Von

Shinziro Mori.

(Eingegangen am 31. Jan. 1940.)

Die vorangehenden gleichnamigen Arbeiten[1] des Verfassers befassten sich nur mit der Struktur der Integritätsbereiche, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt. Der vorliegende dritte Abschnitt setzt die in den vorigen Arbeiten begonnenen Untersuchungen fort und erklärt die Struktur der allgemeinen kommutativen Ringe mit Einselement, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt.

Ringe, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt.

In diesem Paragraphen wird folgendes stets vorausgesetzt:

Voraussetzung. *Im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement lässt jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen.*

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich ohne weiteres der folgende Hilfssatz, der im folgenden immer brauchbar ist.

Hilfssatz I. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler, so besitzt $\mathfrak{R}$ nur endlich viele, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\dots,n)$ und das Nullideal ist als Potenzprodukt dieser Primideale darstellbar.*

Nach unserer Voraussetzung erhalten wir $(a)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\dots\mathfrak{p}_m^{a_m}$, $(b)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\dots\mathfrak{p}_s'^{b_s}$ für zwei Nullteiler a und b, und daher ergibt sich

$$(0)=\mathfrak{p}_1^{c_1}\mathfrak{p}_2^{c_2}\dots\mathfrak{p}_t^{c_t}, \tag{1}$$

wo alle $\mathfrak{p}_i$ von einander verschieden sind. Unter den Primidealen $\mathfrak{p}_i$ gibt es mindestens ein minimales, d. h. ein solches, das keines der übrigen umfasst. Diese seien $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\dots,n)$; dann müssen $\mathfrak{p}_i$ nach (1) ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal sein und alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale müssen in die Darstellung (1) auftreten. Ist $\mathfrak{p}_{n+1}$ in der Darstellung (1) kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal, so muss $\mathfrak{p}_{n+1}$ mindestens eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\dots,n)$ umfassen. Dann können wir in der Darstellung (1) für $\mathfrak{p}_{n+1}$ das in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}_1$ setzen. Auf solcher Weise erhalten wir endlich

$$(0)=\mathfrak{p}_1^{d_1}\mathfrak{p}_2^{d_2}\dots\mathfrak{p}_n^{d_n}, \tag{2}$$

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Jour. **8** (1938), 7. S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II., dieses Jour. **9** (1939), 145.