廣島大學圖書之印

Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. III.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 21. Okt., 1939.)

In der Note II dieses Titels[1] zeigte ich als Hauptsatz:

Ist jedes Hauptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so lässt sich jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}[x]$ auch als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\mathfrak{J}[x]$ minimalen Primidealen darstellen.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit der Behauptung, dass dieser Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn man den Polynomring $\mathfrak{J}[x]$ durch den Polynomring $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots]$ ersetzt, der aus Polynomen in einer Unbestimmtenmenge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ besteht. Für diese Untersuchung nimmt der folgende Satz[2] eine wichtige Schlüsselstellung ein:

Ist jedes Hauptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so ist jedes höchste Primideal eines beliebigen Hauptideals aus $\mathfrak{J}$ stets umkehrbar.

Hilfssätze.

In diesem Paragraphen bedeutet $\mathfrak{J}$ einen Integritätsbereich mit Einselement, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist, und $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots]$ bedeutet den Polynomring in einer Unbestimmten-menge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal, so ist $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}[x_1, x_2, \ldots]$ auch ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal.*

Zunächst ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{J}}$.[3]

---

(1) S. Mori, Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. II., dieses Journal **9** (1939), 1.

(2) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II., dieses Journal **9** (1939), 153.

(3) $\mathfrak{p}[x_i]$ ist ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_i]$. Wir können daher vollständige Induktion anwenden und voraussetzen, dass $\mathfrak{p}[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ auch ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ ist. Ist für zwei Polynome $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$, $f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ in $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ aus $\bar{\mathfrak{J}}$ $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ $f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}})$, so wird $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})\equiv 0\ (\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}])$. Damit ist $f(n_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ ein Polynom in $x_{i_{n+1}}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}]$. Nach unserer Voraussetzung ist aber $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ und folglich muss $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ oder $f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ durch $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}]$, oder $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar sein. Also muss $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{J}}$ sein.